Marie-Françoise BIDAUT-VERON

THEMES dE RECHERCHE

Initialement j'ai fait l'étude de problèmes de contrôle optimal associés. En cas de non existence, j'ai abouti à l'existence de contrôles relaxés, puis de contrôles génériques, et enfin de contrôles singuliers, dans des espaces de mesures. Ceci m'a conduit à étudier des problèmes d'existence et de régularité, notamment pour des équations d'ordre supérieur à 2. Mes recherches se sont ensuite orientées très naturellement vers la question des singularités et du comportement global de divers types d'équations non linéaires, elliptiques ou paraboliques. L'étude de l'existence de singularités isotropes ou anisotropes m'a conduite à investir dans un domaine proche, très enrichissant, celui des équations différentielles ordinaires. Les problèmes de comportement asymptotique m'ont également portée à résoudre des équations sur des variétés et me rapprocher ainsi de la géométrie Riemanienne. Ces contacts se sont révélés fructueux et créateurs de problèmes nouveaux. Mes recherches se sont ensuite élargies à des systèmes elliptiques et paraboliques semi-linéaires ou quasilinéaires de réaction-diffusion, à la structure très riche, et où les problèmes ouverts sont nombreux et intéressants: qu'il s'agisse de problèmes de singularités, d'existence globale, de symétrie ou de blow up.

0.1 Problèmes de contrôle optimal

Le problème type étudié dans ma thèse est le suivant: minimiser une fonction de coût

$$J(u) = \int_\Omega g(x, u(x), y((u)(x))dx, \tag{1}$$

où le contrôle u décrit un espace de type $L^p(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, $p > 1$, et l'état du système est régi par une équation elliptique:

$$-\Delta(y(u))(x) = f(x, u(x), y((u)(x)), \qquad \text{dans } \Omega. \tag{2}$$

Cette étude, dans la ligne des travaux de L. CESARI, conduit à des résultats d'existence sous des hypothèses de convexité. Sans ces hypothèses, j'ai prouvé l'existence de contrôles relaxés, et surtout de contrôles génériques. Ceci requérait des résultats fins de projection sur des fermés non convexes d'espaces uniformément convexes, faisant suite aux travaux de M. EDELSTEIN et E. ASPLUND, qui ont été plus tard à la source de la notion de sous différentiel à près développée par I. EKELAND.

Le cas de contrôles dans $L^1(\Omega)$ a révélé un phénomène de type nouveau, à savoir la non existence de contrôles dans cet espace, mais l'existence de contrôles dans un espace de mesures adapté. Ces mesures, portées par des sous-variétés compactes de Ω, ont conduit à un problème de surface libre intéressant.

0.2 Equations d'ordre supérieur à 2

De telles mesures peuvent apparaître aussi dans les équations elliptiques d'ordre supérieur à 2, au niveau de certaines dérivées. C'est pourquoi j'ai entrepris l'étude d'inéquations variationnelles de la forme:

$$A(u) + \beta(x, u) \ni f, \tag{3}$$

où est un opérateur du calcul des variations d'ordre $2m$, et est un opérateur maximal monotone de $\mathbb{R}$. J'ai d'abord montré l'existence de solutions faibles dans un ouvert non borné, et prouvé la régularité des solutions dans le cas où A est d'ordre 2. Dans le cas où l'opérateur est d'ordre supérieur, j'ai montré la possibilité de non existence et précisé l'équation alors satisfaite au sens des mesures. Ces résultats ont été obtenus en prolongeant l'analyse des sous-différentiels dans les espaces de Sobolev entreprise par H. BREZIS. Je me suis également intéressée aux propriétés de support compact des solutions de certaines inéquations d'ordre 4.

0.3 Equations de courbure moyenne prescrite

a) En 1986 j'ai entrepris l'étude des solutions radiales singulières dans de l'équation de la capillarité (qui décrit les gouttes d'eau pendantes sous un plan horizontal lorsque $N = 2$):

$$div \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = -ku, \qquad \text{où } k > 0, \tag{4}$$

et j'ai montré notamment l'existence globale d'une solution, concave près de l'origine, et l'unicité d'une telle solution, par des méthodes techniquement délicates de comparaison locale et de point fixe. Cette étude a fait suite à celle de P. CONCUS et R. FINN, résolvant leur conjecture de 1975 relative à l'existence, et partiellement celle relative à l'unicité. Il est à signaler que le problème de l'unicité a seulement été résolu par NICHOLOV en 2001.

b) J'ai élargi ce thème d'étude en considérant l'équation de courbure moyenne prescrite:

$$div \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = -f(u) \tag{5}$$

où f est une fonction non linéaire croissante. J'ai démontré l'existence de solutions singulières généralisées sous forme de graphes à l'aide de résultats de R.FINN, et j'obtiens divers résultats concernant le comportement au voisinage de la singularité, et le comportement global des solutions. J'y développe des méthodes d'énergie, très adaptées aux équations différentielles ordinaires, conjointement à des méthodes de comparaison avec des hypersurfaces de courbure moyenne constante, les onduloïdes. J'ai donné aussi des résultats de non-existence de solutions régulières, même généralisées, lorsque f a une croissance super-critique.

c) Je me suis intéressée avec A. RATTO, aux problèmes de la capillarité dans le cadre géométrique des espaces de Minkowski, où l'équation de courbure moyenne prescrite prend la forme générale:

$$div \frac{\nabla u}{\sqrt{1 - |\nabla u|^2}} = g(u) \tag{6}$$

où g est une fonction régulière. Nous avons complété l'étude des singularités (qui apparaissent ici au niveau du gradient) entreprise par R. BARTNIK., en montrant par point fixe l'existence d'une infinité de solutions singulières en un point, tangentes au cône de lumière en ce point. Lorsque $g(u).u \geq 0$, nous montrons en outre l'existence globale de solutions de signe constant, et tendant vers 0 à l'infini. Ce dernier résultat est à rapprocher d'un résultat de L. PELETIER et J. SERRIN.

0.4 Equations semi-linéaires de type Emden-Fowler

a) Dans un gros article en collaboration avec L. VERON en 1991, nous avons obtenu une série de résultats concernant les équations de la forme:

$$-\Delta u = c\frac{u}{|x|^2} + u^q, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N, \quad N \geq 3,\ q > 1,\ c \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

déjà étudiée notamment par B. GIDAS et J. SPRUCK, et

$$-\Delta u = Ce^u, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad C > 0, \tag{8}$$

étudiée par S. CHANDRASEKAR dans le cas radial. La recherche de solutions anisotropes ramène à l'étude des équations sur des sphères

$$\Delta_{S^{N-1}} u - \lambda u + u^q = 0 \qquad \text{sur } S^{N-1}, \quad \lambda > 0, \tag{9}$$

$$\Delta_{S^{N-1}} u + e^{2u} - 1 = 0 \qquad \text{sur } S^2. \tag{10}$$

Un des outils fondamentaux pour obtenir la convergence vers de telles solutions est l'adaptation du théorème de convergence asymptotique de L.SIMON à des équations du type

$$\frac{d^2u}{dt^2} \pm \frac{du}{dt} + M(u) = 0, \tag{11}$$

sur une variété Riemanienne compacte S, où est un opérateur elliptique sur S à dépendance analytique en u. Par l'utilisation systématique des formules géométriques de Bochner-Weitzenböck, nous étendons et simplifions les résultats de B. GIDAS et J. SPRUCK concernant d'un part les estimations a priori des solutions de (8) dans le cas où $1 < q < (N+2)/(N-2)$, d'autre part l'unicité des solutions positives de l'équation

$$\Delta_S u - \lambda u + u^q = 0, \qquad \text{sur } S, \quad \lambda > 0, \tag{12}$$

sur une variété Riemanienne compacte sans bord. Une des conséquences du résultat d' unicité précédent est l'unicité des métriques d' Einstein ($Ricc = kg$) dans une classe conforme de métriques à courbure scalaire prescrite constante positive sur toute variété riemannienne compacte sans bord non difféo-conforme à la sphère standard. L'adaptation de ces résultats au cas de la shère S^{N-1} permet de montrer pour l'équation (7) avec $c = 0$ et $q = (N+1)/(N-3)$, ou pour l'équation (8), que les asymptotiques des solutions sont décrites par le groupe conforme de S^{N-1}. Enfin dans le cas critique $q = (N+2)/(N-2)$, nous montrons l'existence de solutions non radiales de (7) très particulières, de la forme solitons.

b) Motivée par l'étude de l'équation (7), cette fois-ci dans, j'ai été conduite à faire la classification complète des solutions d'une équation différentielle ordinaire sur le cercle S^1 :

$$y'' - \lambda y + |y|^{q-1} y = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad q > 1, \tag{13}$$

et à comparer le niveau d'énergie des solutions. Cette étude, techniquement délicate, me permet de donner en collaboration avec M.BOUHAR, le comportement asymptotique et toutes les orbites possibles pour l'équation (8) en dimension 2. Elle permet également de retrouver des résultats de I. MATANO relatifs au problème parabolique associé dans:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u = |u|^{q-1} u, \qquad \lambda > 0, \tag{14}$$

prouvant la décroissance du nombre de points d'extremum de avec le temps.

c) Ces travaux m'ont conduit à l'étude des singularités pour des équations du type sous-linéaire

$$\Delta u = |x|^{\sigma} |u|^{q-1} u, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N, \quad N \geq 2, \ 0 < q < 1, \ \sigma \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

que j'ai proposée à l'un de mes étudiants de thèse, P. GRILLOT. Cette étude a été menée à bien et étendue à des équations avec potentiel, du type

$$\Delta u = |x|^{\sigma} |u|^{q-1} u - c\frac{u}{|x|^2}, \qquad N \geq 2, \ 0 < q < 1, \ \sigma, c \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Elle fait l'objet d'un article. On y développe une méthode originale d'obtention d'estimations, à l'aide d'une inégalité de la moyenne locale pour l'opérateur de Helmoltz $u \longmapsto \Delta u + ku$ ($k > 0$). Cette étude est aussi à rapprocher de celle de (9). Un des points d'intérêt est l'existence de nombreuses solutions anisotropes positives ou nulles, possédant en outre des plages de zéros, liées à l'existence de solutions de l'équation sur la sphère S^{N-1}

$$\Delta_{S^{N-1}} u + \lambda u - u^q = 0 \qquad \text{sur } S^{N-1}, \quad 0 < q < 1, \ \lambda > 0, \tag{17}$$

On prouve aussi l'existence de solutions de (16) de la forme solitons. Dans le cas de la dimension 2, nous avons obtenu la structure complète des solutions de

(17), et avons résolu, en collaboration avec V. GALAKTIONOV et L.VERON, les problèmes de convergence, très délicats puisque les résultats de Simon ne s'appliquent pas, la non-linéarité n'étant pas analytique.

0.5 Systèmes d'équations elliptiques ou paraboliques semi-linéaires

Mes recherches relatives aux équations d'ordre supérieur à 2 et aux équations semi-linéaires ont trouvé un prolongement naturel dans l'étude de systèmes elliptiques semi-linéaires.

a) En collaboration avec T. RAOUX, également étudiant de thèse, j'ai étudié les singularités et le comportement asymptotique des solutions positives d'un système d'équations elliptiques dans $\mathbb{R}^N$, de type variationnel:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^s v^{t+1}, \\ \Delta v = u^{s+1} v^t, \end{cases} \tag{18}$$

où $s, t > 0$, introduit par F. De THELIN et J.VELIN. Jusqu'à présent l'étude de singularités dans ce genre de systèmes couplés n'avait été entreprise que dans le cas radial, notamment par J. SERRIN & H. ZOU, Y. QI, P. CLEMENT, R. MANASEVITCH, E. MITIDIERI. Dans le cas non radial, la difficulté principale consiste à obtenir des estimations a priori. Nous avons pu résoudre ce problème dans les premier et second cas sous-critiques $s + t + 1 < (N + 2)/(N - 2)$, en utilisant encore la formule de Bochner -Wietzenböck. Nous avons ensuite prouvé des résultats très précis et complexes de convergence. Le problème s'avère très riche, même dans le cas radial, avec l'apparition de couples de solutions dissymétriques.

b) J'ai entrepris depuis d'étudier plus généralement des systèmes non variationnels du type

$$\begin{cases} -\Delta u = u^k v^p, \\ -\Delta v = u^q v^\ell, \end{cases} \tag{19}$$

où $p, q > 0$ and $k, \ell \geq 0$. Par des méthodes de comparaison entre les solutions, j'obtiens des conditions nécessaires d'existence, et je décris complètement le comportement local dans le premier cas sous-critique. Ces résultats sont nouveaux encore maintenant, même dans le cas du système variationnel hamiltonien, où $k = \ell = 0$. L'étude est encore largement ouverte dans le second cas sous-critique.

c) Avec P. GRILLOT nous avons fait l'étude du système hamiltonien relatif à l'autre signe,

$$\begin{cases} \Delta u = v^p, \\ \Delta v = u^q, \end{cases}$$

qui s'avère également très riche. Elle présente un double intérêt: difficultés d'estimations par manque de coercivité, et extinction possible des solutions. L'étude des estimations a été menée à bien dans sa thèse et fait l'objet de [?] et [?]. Nous avons réussi à obtenir les estimations et donnons des conditions d'éliminabilité, qui améliorent des résultats très récents de C. YARUR. Dans le cas sur-linéaire $pq > 1$, , nous étendons les estimations du type Keller-Osserman du cas scalaire de l'équation $\Delta w = w^Q$ $(Q > 1)$ au cas du système. Dans le cas sous-linéaire, nous étendons les résultats du cas scalaire. Un phénomène nouveau est l'apparition de solutions anisotropes positives, même dans le cas sur-linéaire, contrairement au cas scalaire. Les problèmes de convergence combinent toutes les difficultés des résultats précédents.

d) Egalement avec P. GRILLOT, nous avons ensuite considéré un système de type mixte:

$$\begin{cases} \Delta u = v^p, \\ -\Delta v = u^q, \end{cases} \tag{20}$$

Outre son intérêt physique, cette étude s'est révélée mathématiquement très intéressante : elle combine les difficultés des deux signe, et nous y avons obtenu un comportement lui aussi de type mixte, du type de celui de l'équation $\Delta w = w^Q$ pour la fonction u, et du type $-\Delta w = w^Q$ pour la fonction v, au moins dans le cas sur-linéaire. Un fait remarquable est l'effet régularisant apporté par la fonction sousharmonique u au problème, qui permet, contrairement au cas scalaire de l'équation $-\Delta w = w^Q$, d'obtenir des estimations pour toutes les valeurs du couple (p, q), ainsi qu'une propriété de Harnack.

0.6 Problèmes semi-linéaires à singularités mesures

a) Problème de singularité au bord: ce problème est aussi lié au problème de l'étude du comportement des solutions de l'équation

$$-\Delta u = u^q$$

dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$, présentant une singularité en un point du bord $\partial\Omega$. J'ai confié ce problème, alors encore entièrement ouvert, à mon étudiant de thèse L. VIVIER. Les premiers résultats sont relatifs au cas $q < (N+1)/(N-1)$. Nous avons montré l'existence de solutions positives de (**??**) avec une donnée au bord α de type mesure:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^q & \text{dans } \Omega, \\ u = \alpha & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

pourvu que celle-ci soit suffisamment petite. Nous montrons également l'appartenance des solutions à des espaces de Marcinkiewicz convenables. Là aussi la question des estimations est loin d'être résolue dans le cas sur-critique.

b) plus généralement, j'ai étudié avec C. YARUR l'existence de solutions de problèmes de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u = u^q + \mu & \text{dans } \Omega, \\ u = \alpha & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{21}$$

où μ et α sont des mesures

$$\begin{cases} -\Delta u = v^p + \mu, \\ \Delta v = u^q + \eta, \end{cases} \tag{22}$$

non nécessairement bornées. Nos résultats concernant (21) sont nouveaux même dans le cas $\alpha = 0$, à rapprocher de ceux de P. BARAS et M. PIERRE, N. KALTON et I. VERBITSKI et de H. AMANN et P. QUITTNER. Nous considérons aussi le cas de systèmes du même type.

c) Problème de singularité initiale: un autre prolongement consiste en l'étude des singularités en 0 des solutions positives du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u^q, \qquad q > 1, \tag{23}$$

Il s'agit en particulier d'obtenir une estimation convenable lorsque la singularité est en $t = 0$ (le problème a donc un caractère rétrograde), et ensuite d'obtenir une classification complète des solutions. Celle-ci est connue dans le cas $1 < q < (N+2)/N$, voir I. MOUTOUSSAMY & L.VERON, mais le cas $q \geq (N+2)/N$ n'a pas encore été résolu. J'ai obtenu en 1998 des résultats dans le cas où $q < N(N+2)/(N-1)^2$, par la délicate méthode d'estimation du gradient carré de G. GIDAS et J. SPRUCK citée plus haut. Depuis 10 ans ces résultats n'ont pas encore été améliorés, et servent de base à plusieurs articles récents relatifs à des inégalités.

d) Un article avec M. GARCIA-HUIDOBRO et C. YARUR, est consacré à l'étude d'un système parabolique avec termes d'absorption:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u^k v^p, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = u^q v^\ell, \end{cases} \tag{24}$$

où $p, q > 0$, et $k, \ell \geq 0$, au comportement très délicat à établir, le système manquant fortement de coercivité. On étudie les problèmes d'existence, d'unicité, de support des solutions et on montre l'existence de régions invariantes. Un second article, également en préparation, est consacré au système hamiltonien où $k = \ell = 0$, on y étudie les problèmes de trace initiale, d'estimations a priori locales, et l'existence de solutions singulières.

d) Très récemment j'ai repris l'étude du problème a) avec A. PONCE et L. VERON: nous considérons encore les solutions positives de l'équation elliptique semilinéaire

$$-\Delta u = u^q$$

dans un ouvert Ω, nulles sur le bord de Ω sauf en un point x_0. Notre but est de préciser le comportement des solutions au voisinage de x_0 lorsque q est au delà de la première valeur critique $(N+1)/(N-1)$. Ici nous obtenons des résultats précis grâce à des techniques très récentes telles que le Lemme de doublement utilisé par POLACIC, QUITTNER et SOUPLET (2007). L'étude a déjà été concrétisée par une note de C.R.A.S. et un article est en voie d'achèvement.

0.7 Problèmes quasilinéaires

a) J'ai étudié des équations de type quasilinéaire dégénérées, dont le modèle est le suivant

$$-div\left(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u|\right) = |u|^{q-1}u \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N, \quad \text{où } q > p-1 > 0. \tag{25}$$

Dans le cas $p = 2$ on retrouve une équation d'Emden-Fowler. J'ai d'abord étudié l'existence et le comportement global des solutions radiales de l'équation: à l'aide de fonctions d'énergie associées j'obtiens des résultats d'existence et une classification complète; ce qui étend les résultats de H. FOWLER et ceux plus récents de M. GUEDDA et L.VERON. Dans le cas non radial, j'ai étudié le problème des singularités à l'origine pour des solutions positives. J'ai étendu les résultats de P.L. LIONS relatifs au premier cas sous-critique $q < N(p-1)/(N-p)$. J'ai montré également dans ce cas la non existence de solutions positives à l'infini, qui n'était connue jusque là que dans le cas radial.

b) Avec S. POHOZAEV, nous avons réfléchi à l'extension possible des résultats précédents à d'autres opérateurs plus généraux avec moindre coercivité, ainsi qu'à des systèmes. Ceci nous a conduit à développer une technique différente d'estimations des solutions sur des couronnes de, liée à la méthode de Möser. Nous avons obtenu des résultats nouveaux, de non-existence ou d'estimations a priori pour des problèmes d'inéquations du type

$$-div(A(x,u,\nabla u) \geq u^Q, \qquad Q > 0 \tag{26}$$

ou plus généralement

$$\begin{cases} -div(A(x,u,\nabla u) \geq u^k v^p, \\ -div(A(x,u,\nabla u) \geq u^q v^\ell, \end{cases} \tag{27}$$

où $p, q > 0$, et $k, \ell \geq 0$.

c) Avec M. GARCIA-HUIDOBRO, nous avons étudié le comportement asymptotique précis des solutions d'une équation quasi-linéaire avec des poids, de la forme

$$-div(a(x)\,|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u) = b(x)u^q, \tag{28}$$

où a et b sont des fonctions poids, et nous faisons apparaître des exposants critiques de type nouveau, liés au coefficient de l'opérateur ou à celui de la puissance. Ce problème soulève de nouvelles questions intéressantes relatives à l'inégalité de Harnack.

d) Avec E. CHASSAIGNE et L. VERON, nous avons entrepris l'étude du problème de la trace initiale pour l'équation parabolique quasi-linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} - div\left(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u|\right) + u^q = 0, \qquad q > 0,$$

avec pour but d'étendre les résultats de L.VERON et M. MARCUS relatifs au cas de l'équation de la chaleur semi-linéaire. Nous obtenons la définition d'une trace à l'origine, précisons les comportements possibles des solutions, et do,nnons des rsultats d'existence avec données initiales mesures de Radon ou de Borel. Cette étude est à rapprocher de celles de E. CHASSAIGNE et J.L. VAZQUEZ relatives à l'équation des milieux poreux. Les difficultés sont plus grandes ici car les méthodes employées pour le Laplacien ou l'opérateur des milieux poreux ne s'appliquent pas.

e) J'ai repris l'étude du point a), ainsi que celle du problème avec absorption, avec des données mesures

$$div\left(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u|\right) \pm |u|^{q-1} u = \mu$$

où $q > p-1 > 0$, et μ est une mesure de Radon sur Ω. Ici le point de vue est un peu différent, puisqu'on y étudie les questions de l'éliminabilité des singularités et de l'existence en termes de capacité. Ceci concerne essentiellement le cas surcritique $q \geq N(p-1)/(N-p)$. Des résultats d'existence nouveaux sont donnés, dans les cas sur- et sous-critiques

f) J'ai récemment une description quasi -exhaustive des solutions auto-similaires de l'équation de la chaleur dégénérée

$$\frac{\partial u}{\partial t} - div\left(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u|\right) = 0$$

où $p < 2$, de signe quelconque et avec singularité possible par rapport à la nouvelle variable d'espace. J'étudie l'existence de solutions très singulières, ou au contraire de solutions s'éteignant en temps fini Je montre l'existence de solutions présentant une forme de périodicité, positives ou de signe variable. Ceci fait l'objet d'un long article paru dans le cas $p < 2$. et d'un article à paraître dans le cas $p > 2$. On y montre notamment l'existence de solutions à support compact croissant en temps, ou au contraire décroissants, ou présentant un "trou" (plage de zeros) décroissant jusquà disparaître en temps fini, ou au contraire croissant. On obtient aussi l'existence de solutions nouvelles, à forte singularité, à caractère périodique et positives. Ces deux articles font très largement appel à l'étude des systèmes dynamiques autonomes.

g) Avec R. BORGHOL et L.VERON, nous considérons le problème des singularités isolées sur la frontière pour des solutions positives d'équations du type

$$div\left(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u|\right)+d(x)u^{p-1}=0,$$

où d est borné. Nous obtenons des inégalités de Harnack frontières, qui étendent celles relatives au cas linéaire $p=2$; elles permettent d'étudier l'existence de solutions séparables dans le cas d'absorption où $d(x)=-c\,|x|^{p}$, dans un ouvert régulier dont la frontière contient 0. Par ailleurs ces inégalités de Harnack offrent la voie à de nouvelles applications.

h) Je m'intéresse, avec M. JAZAR et L. VERON, à l'existence de solutions particulières pseudo-radiales en dimension 2 de l'équation, avec éventuellement un terme de potentiel

$$div\left(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u|\right)+|u|^{q-1}u-c\frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{p}}=0 \qquad q>p-1,$$

dans le cas d'un demi-espace ou plus généralement d'un cône. Le problème se ramène à l' étude de systèmes dynamiques, qui s'avère très délicate, nécessitant une utilisation fine des techniques de plan de phase. Le cas du 1-Laplacien est notamment abordé, résultat nouveau dans ce genre d'étude. Cette étude doit permettre d'aborder plus généralement le problème de singularité au bord avec terme de source dans un ouvert quelconque suffisamment régulier.

i) Ave mon étudiant de thèse, H. ABDELHAMID, nous étudions des problèmes elliptiques quasilinéaires avec croissance critique dans le gradient,

$$-div\left(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u|\right)=\beta(u)\,|\nabla u|^{p}+f+\alpha,$$

où β est à valeurs positives, croissant ou non, pouvant présenter une explosion, et α est une mesure singulière positive. L'étude montre que le problème est très directement relié à une equation quasilinéaire avec terme de source

$$-div\left(|\nabla v|^{p-2}|\nabla v|\right)=fG(v)+\mu,$$

où G est croissante, et peut aussi présenter une explosion, et μ est une mesure de Radon bornée sur Ω. Une note de C.R.A.S. est à paraître et un article est soumis.Les résultats portent sur les deux types d'équations, existence, nonexistence, multiplicité des solutions, solutions extrémales.