

Laurent VÉRON
PRÉSENTATION SYNTHÉTIQUE

Mes activités scientifiques sont, depuis ma thèse de Doctorat d'État ès Sciences en 1980, dirigées vers l'étude des *phénomènes extrêmes* dans des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles non linéaires comme le sont beaucoup de systèmes issus de l'étude de la physique, voire de la biologie et de l'économie. J'ai consacré une partie importante de ces recherches à l'étude fine de l'objet le plus concentré qui soit, à savoir la *singularité ponctuelle* ou explosion concentrée en un point, en quelque sorte l'atome insécable de ces phénomènes extrêmes. Au début ces recherches ont pu paraître académiques, et j'ai souvent changé de sujets au sein du même corpus de problèmes. En 1992, E.B. Dynkin m'a contacté pour me dire tout l'intérêt que les probabilistes, engagés dans l'étude des processus de super-diffusion, portaient aux travaux que j'avais développés avec mon élève de thèse A. Gmira sur les singularités au bord, singularités dont le constituant le plus élémentaire est la singularité isolée concentrée en un point. J'ai alors développé une collaboration scientifique avec M. Marcus, Professeur au Technion, collaboration qui peu à peu a permis de mettre sur pied un vaste programme d'étude centré autour des notions de *trace au bord* et de *trace à l'instant initial*.

Que désigne la notion de trace au bord ? Si on admet qu'un phénomène complexe se déroule dans un milieu impénétrable de l'espace, et que seul le bord de ce milieu est accessible à l'observation, on recevra une information concentrée sur le bord de ce milieu. Quelle sera cette information et sa connaissance permettra-t-elle de reconstituer de façon sûre (unique) le phénomène, tels sont les deux problématiques de la théorie de la trace au bord. La trace initiale a trait à un phénomène qui évolue dans le temps, dont on se demande si la connaissance de l'état initial suffit à le caractériser entièrement. Dans notre cas les phénomènes sont régis par des équations aux dérivées partielles non linéaires et puisqu'il n'y a pas de limite supérieure à la magnitude des valeurs qu'ils peuvent atteindre, les traces sont naturellement des objets singuliers prenant des valeurs infinies en maints endroits (penser avec l'analogie de l'explosion initiale dans la théorie du Big-Bang), des mesures de Borel généralisées dans la terminologie des mathématiciens. Les singularités isolées au bord en jouant un rôle de microscope, m'ont permis de remplir une part importante de ce programme, en résolvant le cas dit *sous-critique* (ou à absorption modérée). Le cas *sur-critique* présente des difficultés non seulement techniques, (car le microscope précédent n'existe plus) mais conceptuelles extrêmes. Les travaux que je mène avec M. Marcus ont permis de remplacer, au prix de beaucoup d'efforts, le "microscope" ponctuel, et d'obtenir ainsi des *quasi-représentations* de certaines solutions explosives sous formes de séries impliquant les capacités des ensembles d'explosion. Ces formules étendent celles démontrées et utilisées par N. Wiener pour l'étude fine des fonctions harmoniques. La deuxième difficulté que nous avons rencontrée nous a conduit à remplacer, pour la description des mesures trace-au-bord, la topologie usuelle par une autre beaucoup plus fine. Les résultats récents que nous avons obtenus devraient rapidement conduire à la résolution complète de la question de la représentation des solutions au moyen de leur trace précise.

Notons que l'actualité mathématique récente montre combien l'analyse fine des singularités d'équations aux dérivées partielles non-linéaires est un outil important pour comprendre la structure topologique des objets géométriques, permettant à G. Perelman de démontrer la conjecture de Poincaré en dimension 3 grâce l'étude du flot de Ricci.