Laurent VÉRON

Résumé des cinq publications les plus importantes

Il n'est évidemment pas facile de choisir cinq publications parmi une centaine. Aussi j'ai attribué l'importance de ces publications aussi bien à l'impact qu'elles ont eues dans le déroulement ultérieur de mes travaux qu'à l'importance des questions qu'elles ont ouvertes. J'ai donc volontairement laissé de coté une publication ([7] dans la liste de mes travaux) qui avait eu un très grand nombre de citations du fait des estimations explicites qu'elle contient. Cette publication a été souvent mise en référence, mais elle n'a pas eu beaucoup de développements dans la suite de mes recherches. Les publications que j'ai retenues ont toutes trait au thème central de mes travaux, à savoir l'étude des singularités et la description précise des phénomènes explosifs dans les équations aux dérivées partielles non linéaires.

Les cinq publications retenues sont les suivantes

1- Singular solutions of some nonlinear elliptic equations, **Nonlinear Anal. T. M. & A 5**, 225-242 (1981).

2- Nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds and asymptotics of Emden equations (*coll. M.F. Bidaut-Véron*), **Inventiones Math. 106**, 489-539 (1991).

3- Boundary singularities of solutions of nonlinear elliptic equations (*coll. A. Gmira*), **Duke J. Math. 64**, 271-324 (1991).

4- The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations: the subcritical case (*coll. M. Marcus*), **Arch. Rat. Mech. An. 144**, 201-231 (1998).

5- Capacitary estimates of positive solutions of semilinear elliptic equations with absorption (*coll. M. Marcus*), **J. Europ. Math. Soc. 6**, 483-527 (2004).

1 Singular solutions of some nonlinear elliptic equations [12]

La publication, annoncée dans une note de Comptes Rendus en 1979, traite de l'étude des singularités isolées des solutions, dans un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^n$, de l'équation

$$-\Delta u + |u|^{q-1} u = 0, \tag{1.1}$$

dans le cas surlinéaire ($q > 1$). Comme ce type d'équation modélise des problèmes importants de physique théorique (équations de Thomas-Fermi en physique nucléaire avec $q = 3/2$ ou $q = 5/2$ et $n = 3$) les solutions radiales ont été étudiées depuis les années 30 (travaux de Fowler, Sommerfeld, Thomas et Fermi). L'étude de ces solutions radiales reposait sur l'utilisation des méthodes classiques de la théorie des équations différentielles ordinaires : développements asymptotiques, linéarisation. Les méthodes introduites pour traiter les solutions non-radiales furent radicalement nouvelles : pour traiter des solutions positives, l'utilisation de l'estimation a priori dite de Keller-Osserman m'a permis de borner le coefficient qui intervient dans les inégalités de Harnack, grâce à quoi j'ai pu mettre en évidence le caractère asymptotiquement isotrope des singularités. Pour étudier les solutions de signe variable, l'utilisation des variables logarithmique et sphérique a ramené le problème à l'étude asymptotique d'une équation elliptique dans le cylindre $]0,+\infty[\times S^{n-1}$,

$$v_{tt} + av_t + \Delta_{S^{n-1}} v + \ell v - |v|^{q-1} v = 0, \tag{1.2}$$

où a et ℓ sont des constantes et $\Delta_{S^{n-1}}$ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère unité S^{n-1}. Le résultat principal que je démontre dans cet article est le suivant : *Si u est une solution positive de (1.1) dans $\Omega \setminus \{a\}$ admettant une singularité en* 0 *et si* $1 < q < n/(n-2)$,
(i) ou bien

$$u(x) \approx k \begin{cases} |x|^{2-n} & si\ n \geq 3 \\ \ln(1/|x|) & si\ n = 2 \end{cases} \quad quand\ x \to 0, \tag{1.3}$$

pour une constante $k > 0$ pouvant prendre n'importe quelle valeur,
(ii) ou bien

$$\lim_{x \to a} |x|^{2/(q-1)} u(x) = \ell(n,q). \tag{1.4}$$

Quand u n'est plus supposée de signe constant une telle dichotomie demeure (la constante devenant $\pm\ell(n,q)$ dans (ii)), pourvu que

$$(n+1)/(n-1) \leq q < n/(n-2).$$

Deux cas critiques sont apparus :

$$q = n/(n-2) \text{ et } q = (n+1)/(n-1).$$

Le premier cas critique, déjà observé par Fowler dans l'étude radiale, correspond à l'annulation du coefficient ℓ. Dans ce cas là, j'avais montré, dans un travail en collaboration avec H. Brezis [9], que l'équation n'admettait aucune singularité isolée ; ce résultat fut jugé surprenant par les physiciens compte tenu du rôle phénomènologique de cette équation. Le second cas critique $q = (n+1)/(n-1)$ correspond à une rupture de symétrie. Le coefficient ℓ prend la valeur $n-1$ qui est la première valeurs propre non nulle de $\Delta_{S^{n-1}}$, et il se produit une bifurcation dans l'étude du problème stationnaire sur S^{n-1} associé à (1.2)

$$\Delta_{S^{n-1}} w + \ell w - |w|^{q-1} w = 0. \tag{1.5}$$

La structure de l'ensemble des solutions de cette équation devient beaucoup plus complexe en particulier ces solutions ne sont plus nécessairement isolées du fait de l'action des sous-groupes continus de $O(n)$. La méthode dite de Lyapounov-LaSalle ne permettait pas de caractériser entièrement l'ensemble limite des $v(t,.)$ quand $t \to +\infty$. Ce n'est que dix ans plus tard, en collaboration avec X.Y. Chen et H. Matano [43] et en utilisant systématiquement les techniques de Sturm (fondées sur le théorème de séparation de Jordan), que j'ai réussi à élucider complètement le cas de la dimension 2 de l'étude de (1.2) et montrer que cet ensemble limite était toujours réduit à une unique solution de (1.5), ce qui terminait l'étude bi-dimensionnelle des singularités isolées de (1.1).

L'extension des résultats de classification de singularité positives à des équations quasilinéaires de types

$$-div\left(|Du|^{p-2}Du\right) = 0, \tag{1.6}$$

pour $p > 1$, et

$$-div\left(|Du|^{p-2}Du\right) + u^q = 0 \tag{1.7}$$

pour $0 < p-1 < q$ a été l'objet des l'articles [31] et [33] écrits en collaboration avec S. Kichenassamy et A. Friedman respectivement.

2 Nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds and asymptotics of Emden equations [49]

En 1981, B. Gidas et J. Spruck ont publié un article retentissant portant sur les propriétés locales et globales des solutions positives de l'équation

$$\Delta u + u^q = 0 \tag{2.1}$$

pour des exposants que ne recouvrait pas le travail de P.L. Lions, à savoir

$$n/(n-2) \leq q < (n+2)/(n-2).$$

Les trois résultats les plus spectaculaires de leur travail sont :

1- La non-existence de solutions positives régulières de (2.1) dans $\mathbb{R}^n$, propriété qui tombe en défaut si $q \geq (n+2)/(n-2)$ du fait de l'identité de Pohozaev.

2- L'estimation a priori pour toute solution positive de (2.1) dans $B_2 \setminus \{0\}$,

$$u(x) \leq C(n,q)|x|^{-2/(q-1)}, \quad \forall x \in B_1 \setminus \{0\}. \tag{2.2}$$

3- L'unicité de la solution positive de l'équation suivante sur la sphère unité

$$-\Delta_{S^{n-1}}\omega + \ell\omega - \omega^q = 0, \tag{2.3}$$

quand $1 < q < (n+1)/(n-3)$ and $(q-1)\ell \leq n-1$. Les démonstrations de ces deux derniers résultats ont paru suprenantes par leur niveau de difficulté technique, toute les deux fondées sur l'introduction "miraculeuse" de champs de vecteurs associés aux problèmes. Dans le cas de l'estimation a priori, des identités intégrales permettaient alors d'utiliser des résultats célèbres de J. Serrin et d' estimer les coefficients de Harnack de ces équations.

En utilisant ces deux derniers résultats, ils montrent que si u vérifie (2.1) dans un ouvert épointé $\Omega \setminus \{a\}$, alors, ou bien u est régulière, ou bien

$$\lim_{x \to a} |x-a|^{2/(q-1)}u(x) = \ell(q,n). \tag{2.4}$$

Dans notre article, qui marque une de mes premières incursions dans la géométrie riemannienne, et dont une partie des résultats a été annoncée en 1989 dans [47], nous revenons aux questions 1 et 2 considérées par Gidas et Spruck et considérons aussi l'équation dite des sphères de gaz isothermes (déjà étudiée par Chandrashekar dans le cas radial cinquante ans auparavant),

$$-\Delta u = \lambda e^u \tag{2.5}$$

dans un ouvert tridimensionnel, pour $\lambda > 0$. Nous remarquons tout d'abord l'existence d'une paramétrisation des solutions singulières de (2.5) par le groupe conforme de la sphère S^2: en introduisant les variables sphériques (r, σ) dans $\mathbb{R}^3$, et en posant

$$u(r, \sigma) = \ln(1/r^2) + \ln(2/\lambda) + 2\omega,$$

la fonction ω vérifie sur S^2,

$$-\Delta_{S^2} \omega + 1 - e^{2\omega} = 0. \tag{2.6}$$

Comme les solutions de cette équation peuvent s'écrire sous la forme

$$\omega = \frac{1}{2} \ln(\det |d\phi|),$$

où ϕ est une transformation conforme de S^2, l'ensemble des solutions de cette équation forme une variété non-compacte de dimension 3 (qui peut être munie d'une structure de groupe de Lie). En comprenant comment utiliser les résultats de L. Simon sur les asymptotiques des fonctionnelles géométriques à coefficients analytiques, résultats exceptionnellement ardus qui sont l'extension en dimension infinie de résultats classiques de Lojasiewicz, nous montrons en particulier le résultat suivant : *Soit u une solution de (2.5) dans $B_1 \setminus \{0\}$, telle que $|x|^2 e^u \in L^1_{loc}(B_1)$. Alors*
(i) ou bien il existe $\gamma \leq 0$ tel que

$$-\Delta u = \lambda e^u + 4\pi\gamma\delta_0, \tag{2.7}$$

et par suite

$$u(x) = \gamma |x|^{-1} + O(1), \tag{2.8}$$

en 0 *(en particulier u est régulière si $\gamma = 0$),*
(ii) ou bien il existe une solution ω de (2.6) telle que

$$u(x) = \ln(1/|x|^2) + \ln(2/\lambda) + 2\omega(x/|x|) + \circ(1), \tag{2.9}$$

quand $x \to 0$. Nous systématisons les méthodes de démonstration des résultats I et II de Gidas et Spruck en remplaçant l' introduction des champs de vecteurs par la formule de Bochner-Lichnerowicz-Weitzenböck, qui sur une variété (M^d, g) s' écrit

$$\frac{1}{2}\Delta_g \left(|\nabla f|^2\right) = |Hess\, f|^2 + \langle \nabla_g \Delta_g f, \nabla_g f\rangle + Ricc_g(\nabla_g f, \nabla_g f). \tag{2.10}$$

nous montrons que *si (M^d, g) est une variété compacte complète et $q > 1$, toute solution positive de*

$$\Delta_g \omega - \lambda\omega + u^q = 0,$$

sur M, est constante si

$$Ricc_g \geq \frac{d-1}{d}(q-1)\lambda, \tag{2.11}$$

$$q \leq (d+2)/(d-2), \tag{2.12}$$

avec au moins une inégalité stricte si (M^d, g) est conformément difféomorphique à (S^d, g_0). Grâce à ce résultat nous donnons de nouvelles estimations du quotient de Sobolev

$$S_{\lambda,q} = \inf\{Q_{\lambda,q}(v) : v \in W^{1,2}(M) \setminus \{0\}\}, \tag{2.13}$$

où

$$Q_{\lambda,q}(v) = \frac{\displaystyle\int_M \left(|\nabla v|^2 + \lambda v^2\right) dv_g}{\left(\displaystyle\int_M |v|^{q+1} dv_g\right)^{2/(q+1)}}, \tag{2.14}$$

pour $1 < q \leq (n+2)/(n-2)$, et selon la valeur de λ par rapport à la courbure de Ricci de la variété. Par la suite, avec mon étudiant de thèse J.R. Licois, j'ai étendu ce résultat dans [65], [75] en montrant qu'on peut remplaçer (2.11) par

$$(q-1)\lambda \leq \lambda_1(M) + \frac{qd(d-1)}{q+d(d+2)}\left(Ricc_g - \frac{d-1}{d}\lambda_1(M)\right), \tag{2.15}$$

(remarquer que le deuxième terme à droite est négatif par le théorème de Lichnerowicz-Obata) ce qui permet en particulier de considérer les variétés à courbure nulle comme les tores plats (penser aux fonctions doublement périodiques dans le plan). Par l'utilisation systématique des formules (2.10), nous simplifions aussi l'exposition des estimations à priori (2.4) et les étendons à des équations avec un potentiel singulier comme

$$\Delta u + u^q - k\,|x|^{-2}\,u = 0. \tag{2.16}$$

L'utilisation des estimations a priori obtenues et des méthodes de L. Simon pemettent alors de caractériser les singularités en 0 des solutions positives de ces équations dans $B_2 \setminus \{0\}$. dans le cas conformément invariant $q = (n+2)/(n-2)$, nous montrons l'existence d'*ondes elliptiques* qui sont des solutions de (2.16) de la forme

$$u(x) = u(r,\sigma) = r^{(2-n)/2}\omega(\exp[\ln r A](\sigma)) \tag{2.17}$$

où A est une matrice anti-symétrique. Le rôle de ces ondes elliptiques dans la descriptions des solutions de (2.16) est encore un mystère.

3 Boundary singularities of solutions of nonlinear elliptic equations [48]

Ce travail en collaboration avec mon étudiant en Thèse de Doctorat d'État A. Gmira, date de 1989. Il est probablement celui qui a le plus d'impact sur mes travaux actuels dans la mesure où il a ouvert l'étude systématique des traces au bord des solutions d'équations elliptiques non linéaires. Dans son livre récent *Super Diffusion and Positive Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations*, **Univ. Series Lectures 34**, E. B. Dynkin évoque (p. 6) le rôle pionnier de cet article. Ce travail contient trois volets

I- La résolution d'équations non linéaires avec données au bord mesures de Radon dans un ouvert borné n-dimensionnel,

$$\left\{\begin{array}{r} -\Delta u + g(u) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = \mu \text{ sur } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

où g est une fonction continue, le plus souvent croissante, et μ est une mesure de Radon sur $\partial\Omega$. La solution est exprimée dans un sens faible : $u \in L^1(\Omega)$ et $g(u)\rho(x) \in L^1(\Omega)$ où $\rho(x) = dist(x, \partial\Omega)$, suffisant cependant pour permettre de démontrer l'unicité grâce à l'utilisation de l'espace $W_0^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$ comme espace des fonctions test, espace introduit auparavant par H. Brezis dans la formulation de problèmes similaires. L'existence des solutions est obtenue sous l'hypothèse

$$\int_1^\infty g(r^{1-n})r^n dr < \infty \tag{3.2}$$

qui exprime que pour tout $a \in \partial\Omega$ le noyau de Poisson P_a, (qui, rappelons le, est la fonction harmonique dans Ω avec donnée mesure de Dirac en a) vérifie

$$\int_\Omega g(P_a(x))\rho(x)dx < \infty.$$

La construction des solutions se fait par approximation, en utilisant de façon fondamentale des estimations d'équi-intégrabilité données par l'introduction d'espaces de Marcinkiewicz de la forme $M^p(\Omega, \rho^\alpha dx)$. Si $g(r) = |r|^{q-1}r$, la condition (3.2) est remplie si et seulement si

$$0 < q < (n+1)/(n-1).$$

II- L'éliminabilité de singularités isolées au bord, c'est à dire des problèmes où on se une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega} \setminus F)$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{rl} -\Delta u + g(u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = \phi & \text{sur } \partial\Omega \setminus F, \end{array}\right. \tag{3.3}$$

où $F = \{a_1, \ldots, a_p\}$ est un sous-ensemble discret de la frontière et $\phi \in C(\partial\Omega)$. Le résultat démontré, qui est l'analogue pour les problèmes au bord d'un résultat d'éliminabilité obtenu par H. Brezis et moi même [9] concernant les singularités isolées internes, est le suivant : *si g vérifie*

$$\liminf_{r\to+\infty} r^{-(n+1/(n-1)}g(r) > 0 \ \textit{et} \ \limsup_{r\to-\infty} |r|^{-(n+1/(n-1)}g(r) < 0, \tag{3.4}$$

la fonction u se prolonge en une fonction continue dans tout $\bar{\Omega}$ et vérifie en outre le problème de Dirichlet non linéaire régulier avec donnée au bord ϕ. Autrement dit, si la croissance de la non linéarité, qui joue ici un rôle d'absorption, est trop forte, les singularités isolées ne peuvent pas se former.

III- Dans le cas modèle de l'équation

$$-\Delta u + |u|^{q-1} u = 0, \tag{3.5}$$

les résultats précédents se lisent ainsi :

Si $0 < q < (n+1)/(n-1)$ le problème avec données au bord mesure de Radon peut être résolu (de façon unique) avec *toute* mesure de Radon sur $\partial\Omega$.

Si $q \geq (n+1)/(n-1)$ les singularités isolées au bord sont éliminables, en conséquence de quoi le problème avec données au bord mesure de Dirac δ_a pour $a \in \partial\Omega$ ne peut pas être résolu.

Dans la troisième partie de ce travail je donne la description asymptotique précise du profil des singularités ponctuelles au bord des solutions de (3.5) (donc dans le cas $1 < q < (n+1)/(n-1)$) montrant que dans le cas positif ces singularites sont de deux sortes : *Si la singularité est fixée en $a \in \partial\Omega$*

(i) ou bien

$$u(x) \approx kP_a(x) \text{ quand } x \to a \in \partial\Omega, \tag{3.6}$$

pour une constante $k > 0$ pouvant prendre n'importe quelle valeur,

(ii) ou bien

$$\lim_{x\to a} |x-a|^{2/(q-1)} u(x) = \omega((x-a)/|x-a|) \tag{3.7}$$

où, à une rotation de l'espace près, ω est solution de l'équation (1.5) sur la demi-sphère S_+^{n-1}, avec donnée de Dirichlet nulle sur l'équateur.

Dans le cas où la fonction u n'est plus supposée de signe constant, un résultat de dichotomie semblable est encore vérifié (avec les deux valeurs possibles $\pm\omega$ dans (ii)) pourvu que $(n+2)/n \leq q < (n+1)/(n-1)$. La valeur $q = (n+2)/n$ correspond à une nouvelle brisure de symétrie, plus complexe que celle vue précédemment dans l'étude des solutions de (1.5). Les méthodes utilisées reposent sur l'étude asymptotique des solutions dans un cylindre infini $]0, +\infty[\times S_+^{n-1}$ d'une équation de la forme

$$\begin{aligned}(1 + \epsilon_1 v_{tt} + (a+\epsilon_2)v_t + (1+\epsilon_3)\Delta_{S^{n-1}} v + \epsilon_4 \nabla_{S^{n-1}} v_t + \epsilon_5 \nabla^2_{S^{n-1}} v \\ +(\ell+\epsilon_6)v - (1+\epsilon_7)|v|^{q-1} v = 0,\end{aligned} \tag{3.8}$$

où les fonctions ϵ_j, qui tendent vers 0 à l'infini, proviennent de la représentation locale paramétrique de $\partial\Omega$ au voisinage de a. Les résultats sont obtenus en combinant une méthode de type énergie et des techniques asymptotiques très fines que j'avais mises au point en collaboration avec X.Y. Chen et H. Matano dans [43].

En collaboration avec R. Borghol les résultats de caractérisation des singularités isolées au bord sont étendus dans [113] à des équations quasilinéaires du type

$$-div\left(|Du|^{N-2}Du\right) + u^q = 0 \tag{3.9}$$

dans le cas $q > N - 1$. En utilisant l'invariance conforme de l'équation N-harmonique dans $\mathbb{R}^N$ et la construction de solutions fondamentales singulières en un point du bord [112], les estimations de Harnack au bord [105] et la résolution du problème spectral p- harmonique c'est à dire la recherche de fonctions p-harmoniques de la forme $u(x) = u(r,\sigma) = r^{-\beta}\omega(\sigma)$ dans un demi-espace H qui s'annullent sur ∂H, nous obtenons une description ou d'éliminabilité des singularités isolées semblables à celles obtenues dans [48].

4 The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations: the subcritical case [76]

L'étude de la trace au bord des solutions d'équations est très naturelle, elle peut être assimilée à l'étude de la notion physique d'observable. Le problème mathématique est double :

Tout d'abord, étant donnée u une fonction définie dans un ouvert n-dimensionnel Ω et y vérifiant une équation aux dérivées partielles, peut-on définir une notion de "valeur au bord" de cette solution. Cette valeur au bord généralisée est appelée une **trace au bord**.

Ensuite, l'ensemble des traces possibles ayant été identifié, un élément de cet ensemble détermine-t-il de façon unique une solution de l'équation de départ dont il est la trace au bord ?

Le cas des fonctions harmoniques positives dans un ouvert Ω, régulier et borné pour simplifier, est connu depuis les travaux de Riesz et Herglotz. Tout fonction harmonique positive u admet une trace au bord qui est une mesure de Radon μ sur $\partial\Omega$. Ensuite la fonction est uniquement déterminée par cette mesure grâce à la formule de Poisson,

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} P_\Omega(x,y)d\mu(y), \quad \forall x \in \Omega, \tag{4.1}$$

où $P_\Omega(x,y)$ est le noyau de Poisson dans Ω. Enfin le théorème de Fatou permet de préciser le comportement en presque tout point du bord. Ces résultats ont été étendus par Doob aux fonctions surharmoniques positives. Le cas des fonctions sous-harmoniques reste entièrement ouvert. Le travail présenté est à l'origine des recherches que je mène avec M. Marcus sur la théorie des traces. Il a été annoncé dans deux Notes de Comptes Rendus de l'Académie des Sciences en 1996 ([67], [70]). *Nous montrons tout d'abord que si u est une solution positive de*

$$-\Delta u + u^q = 0 \quad \textit{dans } \Omega, \tag{4.2}$$

(en supposant $q > 1$ pour que le problème soit sur-linéaire), pour tout point $a \in \partial\Omega$ la dichotomie suivante se produit :
(i) ou bien pour tout voisinage ouvert V_a de a

$$\lim_{\beta\to 0}\int_{\Sigma_\beta\cap V_a} u(x)dS = \infty, \tag{4.3}$$

où, pour $\beta > 0$,

$$\Sigma_\beta = \{x \in \Omega : \rho(x) = dist(x, \partial\Omega) = \beta\},$$

(ii) ou bien il existe un voisinage ouvert V de a et une forme linéaire positive ℓ sur $C^\infty(V \cap \partial\Omega)$ tels que

$$\lim_{\beta\to 0}\int_{\Sigma_\beta\cap V} u(x)\zeta dS = \ell(\zeta), \tag{4.4}$$

pour toute fonction ζ de classe C^∞, à support compact dans $V \cap \partial\Omega$. Les points singuliers du bord sont ceux pour lesquels (i) se produit. Ils forment un ensemble fermé noté $\mathcal{S}(u)$. Sur l'ensemble complémentaire $\mathcal{R}(u) = \partial\Omega \setminus \mathcal{S}(u)$ existe une mesure de Radon positive μ telle que

$$\lim_{\beta\to 0}\int_{\Sigma_\beta\cap V} u(x)\zeta dS = \int_{\mathcal{R}(u)} \zeta d\mu, \tag{4.5}$$

pour toute fonction continue ζ à support compact dans $\mathcal{R}(u)$. La donnée de $(\mathcal{S}(u), \mu)$ détermine une unique mesure généralisée de Borel ν appelée la trace au bord de u et notée

$$Tr_{\partial\Omega}(u) = \nu \approx (\mathcal{S}(u), \mu). \tag{4.6}$$

Réciproquement, nous résolvons le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u^q = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \quad Tr_{\partial\Omega}(u) = \nu \end{cases} \tag{4.7}$$

ou ν est une mesure généralisée positive de Borel sur $\partial\Omega$. *Nous montrons que si $1 < q < (n+1)/(n-1)$, alors pour toute mesure généralisée de Borel ν le problème (4.7) admet une et une seule solution.* La démonstration utilise de façon très fondamentale les résultats sur les singularités isolées fortes mises en lumière dans l'article précédent. Nous montrons en particulier que si $a \in \mathcal{S}(u)$, $u(x)$ est minorée par la solution de (4.2) décrite par le comportement (3.7). Si $\nu \approx (\mathcal{S}, \mu)$ où $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble fermé de $\partial\Omega$ et μ une mesure de Radon positive sur $\mathcal{R} = \partial\Omega \setminus \mathcal{S}$, nous construisons une solution maximale $\bar{u}_{\mathcal{S},\mu}$ et une solution minimale $\underline{u}_{\mathcal{S},\mu}$ ayant toutes deux pour trace ν. Nous montrons successivement

$$\bar{u}_{\mathcal{S},\mu} - \underline{u}_{\mathcal{S},\mu} \leq \bar{u}_{\mathcal{S},0} - \underline{u}_{\mathcal{S},0}, \tag{4.8}$$

et

$$\bar{u}_{\mathcal{S},0} \leq K\underline{u}_{\mathcal{S},0}, \tag{4.9}$$

pour un $K > 0$ ne dépendant que de q et de la dimension. À partir de cette dernière estimation nous montrons enfin que si

$$\underline{u}_{\mathcal{S},0} \neq \bar{u}_{\mathcal{S},0},$$

on peut construire une solution de (4.2) de trace $(\mathcal{S},0)$ strictement plus petite que la solution minimale $\underline{u}_{\mathcal{S},0}$. Les résultats que nous obtenons étendent de façon purement analytique un remarquable travail précurseur de J.F. Le Gall sur le comportement au bord des solutions positives de

$$-\Delta u + u^2 = 0 \quad \text{dans } D_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\}. \tag{4.10}$$

L'approche de Le Gall était essentiellement probabiliste et utilisait de façon fondamentale la théorie des super-processus déjà étudiés par E.B. Dynkin. Presque toujours en collaboration avec M. Marcus j'ai par la suite développé la théorie des traces, initiales ou au bord, des solutions d'équations paraboliques semilinéaires dont le modèle est

$$u_t - \Delta u + u^q = 0 \quad \text{dans } \Omega\times]0,+\infty[, \tag{4.11}$$

(cf. [74], [79], [88], [91], [93], [95]) ou pour des équations d'origine géométrique [81] où des équations nonlinéaires qui dégénèrent au bord [96], comme

$$-\Delta u + \rho^\alpha(x)u^q = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{4.12}$$

on mème des sur solutions [101] comme

$$-\Delta u + g(x,0) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{4.13}$$

À chaque fois des résultats d'existence d'une trace, mesure généralisée de Borel, sont démontrés (pas nécessairement régulière dans le cas de (4.13)). Enfin le problème inverse de caractériser une solution en fonction de sa trace est traité, jusqu'à une certaine valeur critique de l'exposant. Les techniques de démonstration sont de plus en plus fines. Enfin, nous avons entamé l'étude du problème de trace pour les solutions de (4.2) dans des ouverts non réguliers, mais seulement C^1 par morceaux. Les singularités du bord interviennent alors très directement dans la description de la trace.

5 Capacitary estimates of positive solutions of semilinear elliptic equations with absorption [103]

Avant de présenter ce travail, je vais rappeler le contexte dans lequel il se situe. Les travaux présentés précédemment avaient mis en évidence le rôle des exposants critiques dans les recherche sur la description complète des solutions positives d'équations semi linéaires. Dans le cas de l'équation (4.2), l'exposant critique est $q_c = (n+1)/(n-1)$. Les travaux de Le Gall ($q = 2$), Dynkin et Kuznetsov ($q_c \leq q \leq 2$), puis Marcus et moi-même [77] ($\max\{2, q_c\} \leq q$), puis [90] (cas général $q_c \leq q$) ont permis de caractériser les ensembles du bord éliminables pour l'équation (4.2), ce qui signifie

$$\big(u \in C(\bar\Omega \setminus K) \cap C^2(\Omega) \,\text{solution de (4.2) et } u = 0 \,\text{sur } \partial\Omega \setminus K\big) \Longrightarrow (u \equiv 0)\,,$$

ce sont les ensembles dont la capacité de Bessel $C_{2/q,q'}$ est nulle. Les mesures de Radon μ pour lesquelles le problème

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u + u^q = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \quad u = \mu \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{5.1}$$

admet une solution faible $u = u_\mu$ (toujours unique) sont aussi caractérisées: il s'agit des mesures de Radon absolument continues par rapport à la capacité $C_{2/q,q'}$. Les méthodes de Le Gall et Dynkin et Kuznetsov reposent en grande partie sur l'usage des probabilités, tandis que nos méthodes sont entièrement analytiques. Grâce à ce résultat, nous donnons dans [77] les conditions nécessaires et suffisantes sur les mesures de Borel ν sur le bord pour résoudre le problème (4.7) en construisant une solution maximale. Cependant le phénomène remarquable dans ce cas est la perte d'unicité (résultat de Le Gall quand $q = 2$ et de Marcus et moi dans le cas général). Dynkin a alors introduit la notion de solution σ-modérée de (4.2), ou solution limite d'une suite croissante de solutions faibles $u = u_{\mu_n}$ de (5.1), et de "trace fine", décrite par le biais d'une topologie du bord plus fine que la topologie usuelle. En collaboration avec Kuznetsov, il a montré que, pour $q_c \leq q \leq 2$, toute solution σ-modérée de (4.2) était définie de façon unique par sa trace fine. *Tout le problème est alors de montrer que toute solution est σ-modérée.* Par une construction remarquable, B. Mselati, un élève de Le Gall, a réussi le tour de force de montrer que tel est bien le cas si $q = 2$. La construction de Mselati utilise de façon cruciale le serpent brownien introduit par Le Gall. La clef de la construction de Mselati réside dans la démonstration que la solution maximale $\bar{u}_K$ de (4.2) dont la trace (dans le sens de [76]) est la mesure de Borel indicatrice d'un sous-ensemble compact K du bord est σ-modérée. Notons que sa thèse a été publiée in extenso dans **Memoirs of the Amer. Math. Soc. 168** en 2004. Dans [102] nous étendons ce résultat à tous les cas d'exposants q, par des méthodes entièrement analytiques évidemment. La construction, d'une technicité redoutable, utilise en particulier le nouveau relèvement que nous avons introduit dans [90] (*le relèvement optimal*) ainsi que de nouvelles estimations du noyau de Poisson dans des ouverts réguliers par morceaux. Une étape décisive dans notre travail est une estimation bilatérale ponctuelle de $\bar{u}_K$ grâce à un intégrale de Wiener. On définit la plus grande solution σ-modérée qui explose sur K et s'annulle sur $\partial\Omega \setminus K$ par

$$\underline{u}_K = \sup\{u_\mu : \mu \in W_+^{-2/q,q}(\partial\Omega),\ \mu(K^c) = 0\},$$

et on montre que si $x \in \Omega$, il existe une constante $C = C_{\Omega,q,\alpha}$ telle que

$$\begin{aligned}\frac{\lambda(x)}{C}\int_{\lambda(x)}^{\Lambda(x)} s^{-1-2/(q-1)} C_{2/q,q'}\left(\frac{1}{s}(B_s(x)\cap K)\right)\frac{ds}{s} \leq \underline{u}_K(x)\\ \leq \bar{u}_K(x) \leq C\lambda(x)\int_{\lambda(x)}^{\Lambda(x)} s^{-1-2/(q-1)} C_{2/q,q'}\left(\frac{1}{s}(B_s(x)\cap K)\right)\frac{ds}{s},\end{aligned} \tag{5.2}$$

dans tout cone $\lambda(x) \leq \alpha \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) = \alpha\rho(x)$ où $\alpha > 0$, $\lambda(x) = \mathrm{dist}(x, K)$ et $\Lambda(x) = \max\{|x - z| : z \in K\}$. Pour faire bien comprendre la différence entre le cas sur critique et le cas sous critique, notons que dans ce dernier cas nous avions utilisé dans [76] l'estimation bilatère

$$\frac{1}{C}\,(\lambda(x))^{-2/(q-1)} \leq \underline{u}_K(x) \leq \bar{u}_K(x) \leq C\,(\lambda(x))^{-2/(q-1)} \tag{5.3}$$

qui s'obtient par comparaison directes des solutions $\underline{u}_K$ et $\bar{u}_K$ avec des solutions singulières explicites de (4.2) dont on tire (4.9). Ces solutions n'existent plus dans le cas sur critique, d'où la nécessité d'une démarche complètement différente. L'estimation (5.2) permet de caractériser les points d'explosion forte de $\bar{u}_K$. L'obtention de l'estimation (5.2) s'inspire de la construction de Wiener. Par un choix judicieux de fonction test associé au relèvement optimal, on commence par montrer que si $K \subset B_\gamma(a) \cap \partial\Omega$, on a l'estimation intégrale

$$\int_{\Omega \setminus B_{2\gamma}(a)} \left(\bar{u}_K^q \rho + \bar{u}_K\right) dx \leq C\gamma^{n-2/(q-1)} C_{2/q,q'}(K/\gamma). \tag{5.4}$$

En estimant le noyau de Poisson dans $\Omega \setminus B_{2\gamma}(a)$, on en déduit une estimation ponctuelle

$$\bar{u}_K(x) \leq C\rho(x)\lambda^{1-2/(q-1)}(x) C_{2/q,q'}(K/\lambda(x)). \tag{5.5}$$

La méthode des tranches de Wiener, qui consiste alors à majorer $\bar{u}_K$ par $\sum_j \bar{u}_{K_j}$ où $K_j = K \cap \left(B_{2^{j+1}\lambda(x)}(x) \setminus B_{2^j\lambda(x)}(x)\right)$, permet de donner l'estimation supérieure (5.4) qui tient compte de la structure fine de K. L'estimation inférieure portant sur $\underline{u}_K$ est obtenue en remarquant que, puisque toute solution u_μ est majorée par le potentiel de Poisson $\mathbb{P}_\Omega[\mu]$ de μ, elle est donc minorée par

$$\mathbb{P}_\Omega[\mu] - \mathbb{G}_\Omega[\mathbb{P}^q_\Omega[\mu]], \tag{5.6}$$

(où $\mathbb{G}_\Omega[.]$ désigne le potentiel de Green dans Ω), pour toute mesure $\mu \in W_+^{-2/q,q}(\partial\Omega)$ vérifiant $\mu(K^c) = 0$. En utilisant encore la méthode des tranches de Wiener, on construit des mesures capacitaires pour lesquelles:
(i) le termes non linéaire de (5.6) est dominé par le terme linéaire,
(ii) l'estimation du terme linéaire est similaire à celle de (5.2).

Une fois obtenue l'estimation (5.2), l'égalité de $\underline{u}_K$ et de $\bar{u}_K$ est démontrée par la méthode introduite dans [76]. Cependant d'autres conséquences en découlent. Deux des résultats les plus spectaculaires dans cette direction sont les suivants:

1- *En tout point épais $\sigma \in K$, au sens de la topologie fine associée à la $C_{2/q,q'}$-capacité du bord, l'intégrale de chemin suivante est infinie*

$$\int_0^1 \bar{u}_K^{q-1}(\gamma(t))tdt = \infty$$

pour toute courbe γ de classe C^1 telle que $\gamma(]0,1]) \subset \Omega$, $\gamma(0) \in \partial\Omega$, $\gamma'(0)$ transverse à $\partial\Omega$.
2-*Pour tout $a > 0$ et tout $\sigma \in \partial\Omega$,*

$$\limsup_{\substack{x \to \sigma \\ |x-\sigma| \leq a\rho(x)}} |x-\sigma|^{2/(q-1)} \bar{u}_K(x) \approx \limsup_{s \to 0} C_{2/q,q'}\left(s^{-1}(K \cap B_s(\sigma))\right).$$

Ces résultats peuvent paraître très techniques, mais ils constituent une forme de représentation des solutions singulières de problèmes sur-critiques. Ils ouvrent la voie à l'obtention d'une représentation de toutes les positives solutions de (4.2) au moyen d'une *trace précise* non probabiliste, valable sans limitation d'exposant. La construction de la trace précise et l'unicité dans la classe des solution σ-modérée est donnée dans [110].

La démonstration que toute solution est σ-modérée est en cours. Notons qu'à la différence de la *trace fine* développée par Dynkin et Kuznetsov, la trace précise est ponctuelle et non pas définie à un ensemble de capacité nulle près.

Enfin, nous avons très récemment obtenu des formes similaires pour d'autres problèmes semi linéaires, en particulier les équations paraboliques semilinéaires. Dans [109], [116] nous avons obtenu, au prix de très grandes difficultés techniques (beaucoup plus que dans le cas elliptique), des estimations bilatères vérifiées par la solution u_F de (4.11) dans $\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[$ dont la donnée (la trace) initiale est la fonction indicatrice d'un fermé F de $\mathbb{R}^N$. Cette formule est valable pour tout $q > 1$ et prend l'allure d'une quasi-représentation capacitaire de cette fonction: il existe deux constantes positives C_1 et C_2 ne dépendant que de N et q telles que

$$C_1 W_F(x,t) \leq u_F(x,t) \leq C_2 W_F(x,t) \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,+\infty[\tag{5.7}$$

où W_F est le potentiel $C_{2/q,q'}$-capacitaire de F, définie dans $\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[$ par

$$W_F(x,t) = t^{-1/(q-1)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{N/2-1/(q-1)} e^{-n/4} C_{2/q,q'} \left(\frac{F_n}{\sqrt{(n+1)t}} \right), \tag{5.8}$$

avec $F_n = F \cap \{y : \sqrt{nt} < |x-y| \leq \sqrt{(n+1)t}\}$. Une première conséquence de ce résultat est que la fonction u_F est σ-modérée. En suivant la methode developpe dans le cas elliptique [110], ce résultat conduira surement à l'élaboration d'une théorie de la *trace initilale précise.*