

Document de synthèse sur les surfaces minimales

Martin Traizet

17 octobre 2008

Table des matières

Liste des travaux présentés	3
1 Introduction	4
2 Construction d'exemples	6
2.1 Collage	6
2.2 Ajouter des anses aux exemples de Riemann [3]	8
2.3 Surfaces de courbure totale finie [4]	10
2.4 Surfaces hélicoïdales [7]	13
2.5 Surfaces triplement périodiques [11]	15
2.6 Images [13]	16
2.7 Méthode de Plateau/conjugaison [10]	17
2.8 Surfaces minimales quasi-périodiques [12]	18
3 Classification	19
3.1 Classification des surfaces minimales de genre zéro dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ [9]	19
3.2 Autre résultat de classification [8]	21
3.3 Résultats de compacité [6]	21
3.4 Surfaces minimales bordées par deux courbes convexes [14]	23
Bibliographie	26

Liste des travaux présentés

- [1] M. Traizet. Construction de surfaces minimales en recollant des surfaces de Scherk. **Ann. Inst. Fourier** 46, 1385–1442, 1996. (Il s’agit de ma thèse.)
- [2] M. Traizet. Weierstrass representation of some simply-periodic minimal surfaces. **Annals of Global Analysis and Geometry** 20, 77–101, 2001.
- [3] M. Traizet. Adding handles to Riemann minimal examples. **Journal Inst. Math. Jussieu** 1, No 1, 145–174, 2002.
- [4] M. Traizet. An embedded minimal surface with no symmetries. **Journal of Diff. Geom.** 60, No 1, 103–153, 2002.
- [5] L. Hauswirth, M. Traizet. The space of embedded doubly-periodic minimal surfaces. **Indiana Univ. Math. Journal** 51, No 5, 1041–1079, 2002.
- [6] M. Traizet. A balancing condition for weak limits of minimal surfaces. **Comment. Math. Helv.** 79, 798–825, 2004.
- [7] M. Traizet, M. Weber. Hermite polynomials and helicoidal minimal surfaces. **Invent. Math.** 161, 113–149, 2005.
- [8] J. Perez, M. Rodriguez, M. Traizet. The classification of doubly periodic minimal tori with parallel ends. **Journal of Diff. Geom.** 69, no. 3, 523–577, 2005.
- [9] J. Perez, M. Traizet. The classification of singly periodic minimal surfaces with genus zero and Scherk type ends. **Trans. Amer. Math. Soc.** 359, 965–990, 2007.
- [10] L. Mazet, M. Rodriguez, M. Traizet. Saddle Towers with infinitely many ends. **Indiana Univ. Math. Journal** 56, No 6, 2821–2838, 2007.
- [11] M. Traizet. On the genus of triply periodic minimal surfaces. **Journal of Diff. Geom.** 79, 243–275, 2008.
- [12] L. Mazet, M. Traizet. A quasi-periodic minimal surface. **Comment. Math. Helv.** 83, 573–601, 2008.
- [13] M. Traizet. Exploring the space of embedded minimal surfaces of finite total curvature. **Experimental Math.** 17 :2, 205–221, 2008.
- [14] M. Traizet. On minimal surfaces bounded by two convex curves in parallel planes. Accepté pour publication à **Comment. Math. Helv.**

1 Introduction

Dans ce mémoire, je présenterai mes travaux sur les surfaces minimales. J'ai regroupé les articles en deux grands thèmes : 1) construction d'exemples et 2) classification (ce dernier regroupant de vrais résultats de classification et des résultats un peu disparates mais motivés pas des questions d'unicité).

De mon point de vue, les surfaces minimales les plus intéressantes sont celles qui sont complètes, plongées et de courbure totale finie dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Pendant longtemps, les seuls exemples connus étaient le plan et la caténoïde, jusqu'à la découverte en 1982 d'un nouvel exemple, la surface de Costa, qui a un peu renouvelé l'intérêt pour les surfaces minimales.

On s'intéresse aussi aux surfaces minimales périodiques, c'est à dire invariante par un groupe discontinu d'isométries G . Les exemples sont plus nombreux ; certains datent du 19-ème siècle : surfaces de Scherk, exemples de Riemann, surfaces triplement périodiques de Schwartz. On les étudie dans le quotient \mathbb{R}^3/G . Il est naturel de supposer que la courbure totale dans le quotient est finie.

Le thème de tous les articles est donc celui des surfaces minimales complètes, plongées dans les 3-variétés plates (sauf pour le dernier, où on considère des surfaces à bord). On va sans doute me reprocher ce côté un peu monothématique. Pour ma défense, les résultats, et surtout les méthodes sont variés. En voyant une surface minimale comme le graphe d'une fonction, on est conduit à une équation aux dérivées partielles elliptique, il s'agit donc d'analyse. C'est le point de vue des articles [1], [10], [12]. En les voyant comme immersion conforme, on est conduit (via la représentation de Weierstrass) au cadre plus algébrique de la théorie des fonctions sur les surfaces de Riemann compactes.

En ce qui concerne la construction d'exemples, la question qui a motivé mon travail est celle des symétries. Tous les exemples connus jusqu'ici possédaient des symétries. On disposait en effet de techniques variées pour construire des surfaces minimales, mais d'une façon ou d'une autre, on imposait toujours une certaine symétrie. D'où la question posée par Hermann Karcher [Kar91] :

Are the many symmetries of the known embedded minimal surfaces essential for their existence or merely convenient for their construction ?

J'ai répondu à cette question en construisant des surfaces minimales sans symétries [4]. La question se pose aussi pour les surfaces périodiques. David Hoffman [Hof90] pose la question :

Does there exist a triply periodic embedded minimal surface with no symmetries other than translations?

Dans le même ordre d'idées, Hermann Karcher [Kar91] demande si

Can triply periodic minimal surfaces of arbitrarily large genus exist in a non-trivial way, or does the genus stay bounded if one divides out all translational symmetries?

Une façon de mesurer la complexité d'un exemple, c'est de considérer un domaine fondamental sous l'action du groupe de symétries et de calculer sa caractéristique d'Euler, ou sa courbure totale par exemple. Je ne crois pas me tromper en affirmant que tous les exemples connus jusqu'ici avaient un domaine fondamental homéomorphe au disque! En ce qui concerne la courbure totale, l'hélicoïde de genre un [HKW93] est le premier exemple qui ait un domaine fondamental de courbure totale infinie (mais toujours topologiquement un disque). Dans [3], [4], on construit des exemples qui ont un domaine fondamental de courbure totale et de genre arbitrairement grands, et dans [10] et [12], on construit des exemples qui ont un domaine fondamental de courbure totale infinie.

De façon plus prosaïque, on peut mesurer la complexité d'un exemple par le nombre d'équations qu'il y a à résoudre pour le construire. La plupart des méthodes conduisent en effet à un Problème de Périodes. Les symétries imposées aux constructions précédentes visaient entre autre à réduire le nombre de périodes. Dans [4], on résout un nombre arbitrairement grand de périodes par fonctions implicites. Dans [12] on résout aussi un nombre arbitrairement grand, ou même infini, de périodes, par un argument topologique.

En ce qui concerne la classification, la question est la suivante : déterminer toutes les surfaces minimales de courbure totale finie (toujours complètes, plongées) et de topologie fixée (genre, nombre de bouts) dans une variété plate \mathbb{R}^3/G . Lorsque le genre est petit, on peut obtenir une classification complète. On trouvera deux résultats de ce type dans [8] et [9]. En général, il est illusoire de vouloir tout classifier, et on se contente d'étudier la structure de l'ensemble des exemples de topologie donnée. Cet espace a une topologie naturelle, celle de la convergence lisse sur les compacts. Est ce qu'il est compact? Est ce qu'il a une structure de variété? Quelles sont des coordonnées locales sur cet espace? Ce qui revient à demander si les exemples sont déformables, et de quelle façon. On trouvera des résultats de ce type dans [5] et [6].

Une notion récurrente dans plusieurs de mes travaux est celle d'équilibre. Aussi bien dans les constructions d'exemples que dans les résultats de classification, il y a des points de concentration de courbure, qui interagissent

entre eux au moyen de forces de type électrostatique. Le principe général, c'est que s'il y a peu de points de concentration, il y aura une seule position d'équilibre, qui sera donc aussi symétrique que possible. Ceci explique pourquoi les exemples les plus simples ont beaucoup de symétries, et la difficulté qu'il y avait à construire des exemples sans symétries.

La principale source d'inspiration de mes travaux est l'article de Meeks, Perez, Ros [MPR98] sur l'unicité des exemples de Riemann. D'une part, les résultats de classification de [8] et [9] suivent la stratégie introduite dans cet article. D'autre part, ils utilisent le théorème des fonctions implicites pour montrer l'unicité locale des exemples de Riemann au voisinage d'une certaine configuration limite où ils dégénèrent. Ils appliquent en fait le théorème des fonctions implicites en un point de l'espace des paramètres qui correspond à des surfaces singulières. J'ai repris cette idée pour construire des exemples, en me plaçant dans le cadre plus naturel des surfaces de Riemann à points doubles.

2 Construction d'exemples

2.1 Collage

Les articles [1], [2], [3], [4], [7] et [11] sont des constructions par collage, en anglais *gluing*. On y construit des exemples de surfaces minimales en assemblant des briques élémentaires : plans, caténoïdes, hélicoïdes, surfaces de Scherk.

Dans ma thèse [1], j'avais désingularisé une famille finie de plans verticaux par collage de surfaces de Scherk. J'avais adapté aux surfaces minimales la construction de Kapouleas [Kap90]. Il s'agit d'analyse, d'équations aux dérivées partielles. Le principal défaut de ce type de construction est sa lourdeur. Avant de me lancer dans la construction de nouveaux exemples, j'ai donc cherché à simplifier la méthode.

Dans le second article [2], j'ai donné une nouvelle démonstration du théorème de la thèse en utilisant la représentation de Weierstrass. Rappelons en le principe. Si Σ est une surface de Riemann et ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sont trois 1-formes holomorphes sur Σ , alors en posant $\psi_i(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_i$ et $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, on obtient une immersion minimale $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ pourvu que les conditions suivantes soient satisfaites : $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ qui garantit que ψ est conforme, $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 > 0$ qui garantit que ψ est régulière et $\operatorname{Re} \int_\gamma \phi_i = 0$ pour tout cycle γ , qui garantit que ψ est bien définie (le problème des

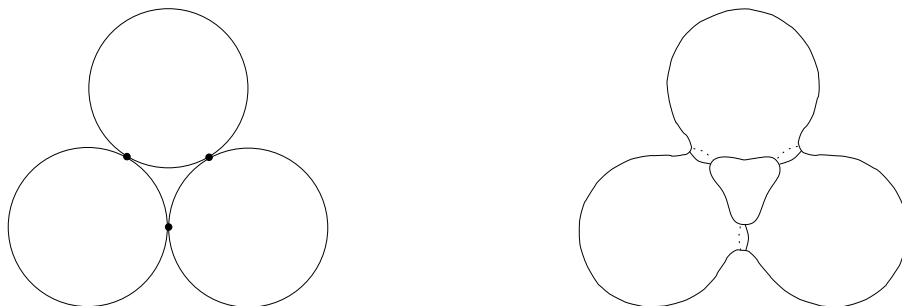


FIG. 1 – A gauche : une surface de Riemann formée de trois sphères avec trois points doubles. A droite : une surface de Riemann de genre 1 obtenue en ouvrant les points doubles.

périodes). Pour construire un exemple, on définit $(\Sigma, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ dépendant de paramètres, et on ajuste les paramètres pour que les conditions soient satisfaites.

Mon propos n'est pas ici d'expliquer en détails la construction et je renvoie le lecteur aux articles. Mais je peux néanmoins donner une idée du cadre. Le point de vue que j'ai adopté sur les surfaces de Riemann est une construction due je crois à L. Bers [Ber74], appelée en Anglais *opening the nodes*, que l'on peut traduire par "ouvrir les points doubles"¹. On part d'une surface de Riemann, qui peut avoir plusieurs composantes. Dans mon cas c'est une union de sphères de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On considère des paires de points a_i, b_i , et des coordonnées locales complexes v_i, w_i au voisinage de ces points (avec $v_i(a_i) = w_i(b_i) = 0$), et on se donne de petits nombres complexes t_i . On enlève les disques $|v_i|^2 < |t_i|$ et $|w_i|^2 < |t_i|$. On recolle abstraitement les cercles du bord en identifiant chaque point du cercle $|v_i|^2 = |t_i|$ avec le point du cercle $|w_i|^2 = |t_i|$ qui vérifie $v_i w_i = t_i$. Si $t_i \neq 0$, ça crée un cou, et l'argument de t_i correspond à un *Dehn twist*. Si $t_i = 0$, cela revient à identifier le point a_i avec le point b_i et on crée un point double. On définit ainsi une surface de Riemann Σ_t , avec un point double pour chaque t_i nul.

Les surfaces de Riemann à points doubles sont celles qu'il faut rajouter pour compactifier l'espace de Teichmuller (compactification de Mumford Deligne). La construction ci-dessus paramètre un voisinage de Σ_0 dans cette compactification.

Pour l'instant on n'a qu'une définition. Le théorème qui rend cette définition

¹Certains auteurs traduisent *node* par noeud. Il faut prendre ici le mot noeud au sens des noeuds d'un réseau. Je préfère la terminologie de point double, qui est justifiée dans la mesure où les points doubles ordinaires des courbes algébriques sont des *nodes*.

intéressante est du à Fay [Fay73] et Masur [Mas76] (dans le cas méromorphe) et va nous permettre de faire des calculs. On peut de façon naturelle définir une 1-forme holomorphe ω_t sur Σ_t en prescrivant ses périodes, quand Σ_t est une surface de Riemann sans points doubles (c'est à dire que les t_i sont tous non nuls). Le théorème de Fay dit que ω_t se prolonge méromorphiquement en $t_i = 0$, avec au plus des pôles simples aux points doubles.

Dans mon cas, Σ_0 est une union de sphères de Riemann avec des points doubles. On peut donc calculer explicitement ω_0 sous forme de fraction rationnelle sur chaque sphère. Moralement, toutes les équations que l'on a à résoudre se prolongent analytiquement en $t_i = 0$, et sont calculables explicitement en $t = 0$. On les résout pour t proche de 0 par fonctions implicites en ce point.

Le cas $t = 0$ correspond géométriquement au cas limite (ou dégénéré, ou singulier) où toutes les surfaces de Scherk que l'on veut coller sont infiniment loin les unes des autres. Un progrès conceptuel par rapport aux constructions du type Kapouleas, est que l'objet singulier se trouve naturellement inclus dans la famille, de façon analytique.

2.2 Ajouter des anses aux exemples de Riemann [3]

Ayant introduit de nouveaux outils, l'étape suivante était de construire de nouveaux exemples.

Les exemples de Riemann sont une famille à un paramètre de surfaces minimales périodiques, fibrées par des cercles et des droites horizontaux. Le paramètre est la période. Quand cette période est proche d'être horizontale, on peut voir la surface comme un collage de plans horizontaux et de caténoïdes, avec une caténoïde entre deux plans consécutifs. En 1991, F. Wei avait construit un exemple similaire (non publié) où le nombre de caténoïdes était alternativement 1 et 2. Est ce qu'on peut mettre plus de caténoïdes ?

Ici, les paramètres de la construction sont le nombre n_k de caténoïdes dans la k -ème couche (c'est à dire entre le k -ème plan et le suivant) et leur position. On note $p_{k,i} \in \mathbb{C}$ la position de la i -ème caténoïde dans la k -ème couche, $1 \leq i \leq n_k$ et $k \in \mathbb{Z}$. J'appelle l'ensemble des $p_{k,i}$ la configuration. Par exemple, la configuration $n_k = 1$, $p_{k,1} = k$ donne les exemples de Riemann.

Pour que la construction aboutisse, il faut que la configuration soit équilibrée, au sens suivant : notons $c_k = \frac{(-1)^k}{n_k}$ et

$$F_{k,i} = 2 \sum_{j \neq i} \frac{c_k^2}{p_{k,i} - p_{k,j}} + \sum_{j=1}^{n_{k-1}} \frac{c_k c_{k-1}}{p_{k,i} - p_{k-1,j}} + \sum_{j=1}^{n_{k+1}} \frac{c_k c_{k+1}}{p_{k,i} - p_{k+1,j}}.$$

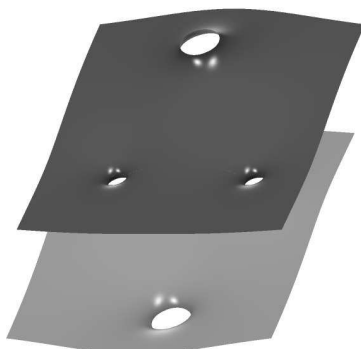


FIG. 2 – Une surface de Wei. Les caténoïdes forment des triangles équilatéraux. Image J. Hoffman et F. Wei.

On peut voir c_k comme une charge et $F_{k,i}$ (ou plutôt sa conjuguée $\overline{F_{k,i}}$) comme une force électrostatique sur $p_{k,i}$. La configuration est équilibrée si toutes les forces $F_{k,i}$ sont nulles.

Quelques mots sur la mise en oeuvre de la méthode expliquée dans la section précédente : les $p_{k,i}$ sont des paramètres utilisés pour définir la surface de Riemann Σ , en fait ils donnent la position des points doubles. Ce n'est qu'a posteriori qu'on constate qu'ils correspondent géométriquement à la position des caténoïdes.

Les $F_{k,i}$ sont des équations qui viennent du problème des périodes : c'est ce que devient le problème des périodes quand on fait $t \rightarrow 0$. Comme il a été dit, en $t = 0$, toutes les équations deviennent algébriques. En suivant la philosophie des Douady [DD94], on interprète ces équations comme des forces. On verra à la section 3.3 que ces forces ont vraiment une origine physique.

Pour pouvoir appliquer le théorème des fonctions implicites, il faut faire une hypothèse sur la matrice jacobienne des $F_{k,i}$. A noter que l'on impose que la configuration soit périodique, c'est à dire que $p_{k+N,i} = p_{k,i} + T$, pour un certain entier N et un certain $T \in \mathbb{C}$, et on travaille modulo cette période, ce qui fait que la matrice jacobienne est de taille finie. On impose qu'elle ait un noyau de dimension (complexe) 1, ce qui est la dimension minimum vu l'invariance des forces par translation des $p_{k,i}$. On dit que la configuration est non-dégénérée si c'est le cas.

On dispose d'une famille explicite de configurations équilibrées non-dégénérées. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et prenons $n_k = 1$ pour k pair et $n_k = m$ pour k impair. La

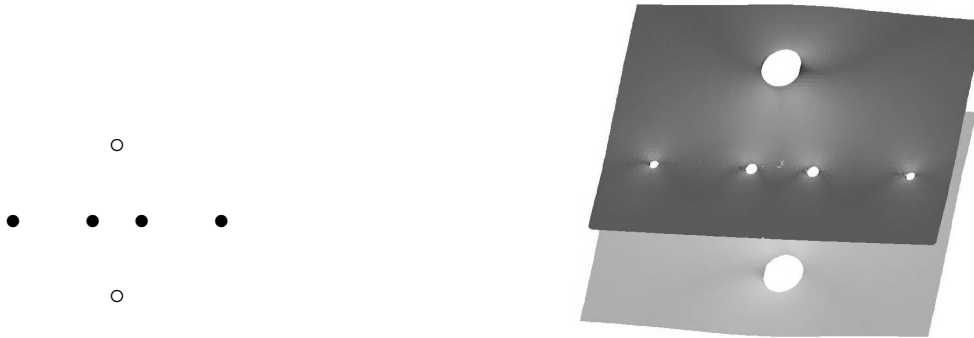


FIG. 3 – La configuration dans le cas $m = 4$, et une surface de la famille correspondante. Image par l’auteur en utilisant *mesh*.

configuration est $p_{k,1} = ki$ si k pair et $p_{k,j} = ki + \cot \frac{j\pi}{m+1}$ si k impair (avec i le nombre complexe $\sqrt{-1}$).

Pour $m = 1$ on retrouve les exemples de Riemann ; pour $m = 2$, les surfaces de Wei. Dans ce cas, les points de la configurations forment des triangles équilatéraux. Ce qui est remarquable, c’est qu’aucune symétrie ne force les triangles à être équilatéraux : elles nous disent juste que ces triangles doivent être isocèles. Les triangles équilatéraux sont une conséquence miraculeuse de la condition d’équilibre.

2.3 Surfaces de courbure totale finie [4]

Dans cette section on s’intéresse aux surfaces minimales $M \subset \mathbb{R}^3$ qui sont complètes, plongées et de courbure totale finie. Commençons par un rapide tour d’horizon des exemples connus.

La plus ancienne est la caténoïde, seule surface minimale de révolution, découverte par Meusnier au 18-ème siècle. En 1982, C. Costa a découvert un nouvel exemple de genre un avec trois bouts, en donnant sa représentation de Weierstrass en termes de fonctions elliptiques. D. Hoffman et W. Meeks [HM90], [HK97] ont démontré que la surface de Costa était plongée, et l’ont généralisée en une famille à deux paramètres $M_{k,\lambda}$, où $k \in \mathbb{N}^*$ est le genre et $\lambda \in [1, \infty[$ est le paramètre conforme du tore rectangulaire sur lequel la surface est paramétrée. Chaque surface $M_{k,\lambda}$ a trois bouts. On l’appelle famille de Costa Hoffman Meeks. La surface originale de Costa est $M_{1,1}$. Des exemples à quatre et cinq bouts similaires à la surface de Costa ont été construits [Woh91].

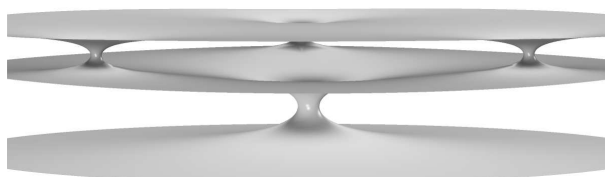


FIG. 4 – Une surface de Costa Hoffman Meeks de genre $k = 2$, pour une grande valeur du paramètre conforme λ . La famille dégénère en quatre caténoïdes. Image J. Hoffman.

Kapouleas [Kap97] a construit des exemples avec un nombre arbitraire de bouts en désingularisant une famille de plans horizontaux et de caténoïdes ayant le même axe vertical. Il obtient ainsi des surfaces minimales ayant beaucoup de plans verticaux de symétrie et un genre très élevé.

Weber et Wolf [WW02] ont construit, pour tout genre $k \geq 1$ impair, un exemple de genre k avec $k + 2$ bouts. Par contre ils ne peuvent pas démontrer que leurs exemples sont plongés, même si les images indiquent que ce doit être le cas.

On a les résultats de classification suivants (toujours dans le cas d'une surface minimale complète de courbure totale finie M) :

Théorème de Schoen [Sch83] Si M a deux bouts alors M est une caténoïde.

Théorème de Lopez Ros [LR91] Si M est de genre zéro alors M est un plan ou une caténoïde.

Théorème de Costa [Cos89] Si M est de genre un avec trois bouts, alors M est une surface de Costa Hoffman Meeks $M_{1,\lambda}$.

Enfin on a les conjectures suivantes.

Conjecture 1 (Hoffman Meeks [HK97]) *si M est de genre k , elle a au plus $k + 2$ bouts.*

On sait que cette conjecture est vraie en genre $k = 0$ par le théorème de Lopez Ros.

Conjecture 2 ([HK97]) *si M a trois bouts, alors c'est une surface de Costa Hoffman Meeks $M_{k,\lambda}$.*

On sait que cette conjecture est vraie en genre $k = 1$ par le théorème de Costa.

Mon objectif était de construire des exemples en collant un nombre fini de plans horizontaux avec des caténoïdes. Cette construction est très similaire au cas périodique de la section précédente. On a de la même façon une configuration de points $p_{k,i}$ qui représente la position des caténoïdes dans chaque couche, et des forces données par la même formule, sauf que cette fois, les charges c_k ne sont pas fixées, mais sont des paramètres réels positifs que l'on peut prescrire. Géométriquement, ils représentent la vitesse à laquelle s'ouvrent les caténoïdes dans la k -ème couche : on construit une famille à un paramètre de surfaces $(M_t)_{0 < t < \varepsilon}$ qui asymptotiquement aura des caténoïdes de taille $c_k t$ dans la k -ème couche. La présence de ces paramètres est un avantage pour l'étude des configurations. Par exemple, on peut montrer que certaines configurations équilibrées sont non-dégénérées pour des valeurs génériques des paramètres c_k .

La difficulté supplémentaire par rapport à la construction précédente est liée à la condition de non-dégénérescence : la matrice jacobienne a toujours un noyau de dimension (complexe) au moins deux. Pour compenser ce noyau, il faut trouver une relation entre les périodes, mais elle est bien cachée et il m'a fallu plus d'un an pour la découvrir.

Au final, la construction apporte les réponses suivantes. Pour les exemples à trois bouts (donc deux couches de caténoïdes), les seules configurations équilibrées non-dégénérées sont celles qui donnent les surfaces de Costa Hoffman Meeks. On ne peut donc pas construire de contreexemple à la conjecture 2 par cette méthode. On verra à la section 3.3 ce que l'on peut quand même en conclure. On remarque que dans ce cas, la symétrie diédrale est une conséquence de la condition d'équilibre. Ça explique un peu d'où viennent les symétries des surfaces à trois bouts.

Pour les surfaces à 4 bouts ou plus, la situation change complètement. Il y a énormément de configurations équilibrées. Entre autres, on trouve des exemples non symétriques, ce qui répond à la question posée par H. Karcher. Il n'est pas très dur de calculer numériquement des configurations non symétriques, mais pas si facile d'en démontrer l'existence. Le premier exemple asymétrique dont j'ai réussi à démontrer l'existence était de genre 45 avec cinq bouts [4]. Plus récemment, j'ai démontré l'existence d'un exemple asymétrique de genre 7 avec quatre bouts [13].

Tous ces exemples sont obtenus par le calcul, c'est à dire en voyant la condition d'équilibre comme un système d'équations algébriques. D'un point de vue plus physique, on aimerait trouver des configurations équilibrées en cherchant des points critiques du potentiel électrostatique associé aux forces. Par exemple, on peut obtenir les configurations de la section 2.2 de cette

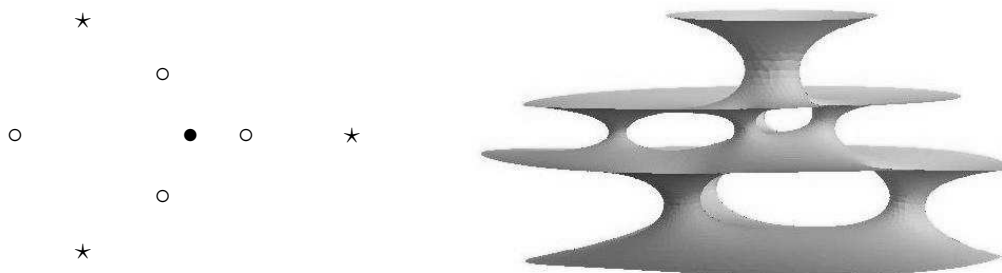


FIG. 5 – Une configuration équilibrée et une surface minimale de genre 5 à quatre bouts dans la famille correspondante. Cette surface a un plan vertical de symétrie. Image par l’auteur en utilisant *Maple*. On peut voir une image en 3 dimensions de cette surface sur ma page web.

façon, pourvu qu’on impose une symétrie de sorte que les variables soient réelles : on impose $p_{k,j} = ki + x_{k,j}$ avec $x_{k,j} \in \mathbb{R}$. Alors le potentiel est une fonction propre, minorée des variables $x_{k,j}$; il admet donc un minimum. Ce minimum est en fait unique, c’est la configuration donnée dans la section 2.2. Le problème est que je ne vois pas de moyen de garantir que ce point critique soit non-dégénéré sans un calcul explicite.

L’interprétation des équations comme des forces n’est pas indispensable, mais fournit un cadre, une ambiance. Elle simplifie certains arguments, par exemple dans certains cas on peut conclure que des forces sont nulles par symétrie. Elle guide l’intuition pour la recherche de configurations équilibrées.

En ce qui concerne la conjecture 1, on ne peut pas construire de contre-exemples par cette méthode. En fait, on peut montrer que les exemples (plongés) à n bouts que l’on obtient sont toujours de genre au moins $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Le genre croît donc de façon quadratique, alors que la conjecture demande une croissance linéaire. Ce que ça veut dire, c’est que si une famille de contre-exemples existe, elle cesse d’être plongée bien avant de dégénérer en caténoïdes. On verra à la section 3.3 ce que l’on peut tirer de cette information.

2.4 Surfaces hélicoïdales [7]

Dans cette section, on construit des surfaces minimales à bouts hélicoïdaux en collant des hélicoïdes. Le point de départ de ce travail est la famille \mathcal{H}_t des

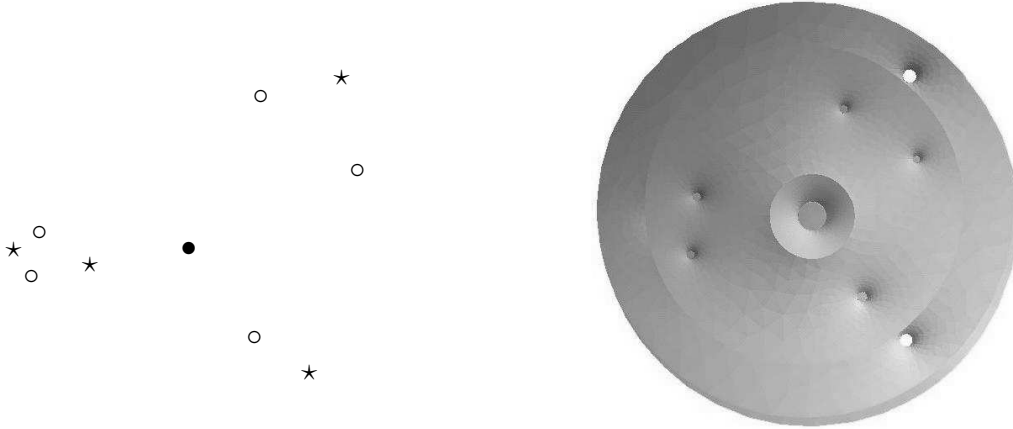


FIG. 6 – Une surface minimale asymétrique de genre 7 à quatre bouts et la configuration qui a servi à la calculer. Image par l’auteur en utilisant *Maple*. On peut voir une image en 3 dimensions de cette surface sur ma page web.

hélicoïdes de genre 1 périodiques, construite par M. Weber. Chaque surface \mathcal{H}_t est invariante par un vissage vertical d’angle $2\pi t$, est de genre 1 dans le quotient, et a deux bouts hélicoïdaux qui font chacun t tours. La famille existe pour $\frac{1}{2} < t < \infty$. Pour $t \rightarrow \infty$, elle converge vers le fameux hélicoïde de genre 1 non périodique [HKW93]. Lorsque $t \rightarrow \frac{1}{2}$, la surface dégénère en trois hélicoïdes. C’est ce que nous avons constaté avec M. Weber en faisant des images de ces surfaces. Cela suggérerait que l’on puisse construire la famille pour t proche de $\frac{1}{2}$ en collant trois hélicoïdes, et bien sur des exemples de genre plus grand en collant plus d’hélicoïdes.

La construction est dans l’esprit des précédentes. Là encore il y a une configuration qui doit être équilibrée, les forces sont données par

$$F_i = p_i + \sum_{j \neq i} \frac{\varepsilon_j}{p_i - p_j}.$$

Dans cette formule, p_i représente la position de l’axe d’une hélicoïde et $\varepsilon_i = \pm 1$ selon qu’il s’agit d’une hélicoïde droite ou gauche. De façon assez surprenante, les configurations équilibrées sont données en termes de zéros des polynômes de Hermite.

Techniquement, la difficulté supplémentaire est que la représentation de Weierstrass n’est pas bien définie dans le quotient par le vissage. Ce qui passe au quotient, c’est la différentielle logarithmique dg/g de l’application de

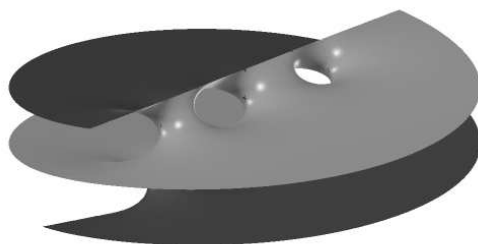


FIG. 7 – Collage de cinq hélicoïdes. Il n'est pas facile de voir les hélicoïdes, mais on voit bien leurs axes verticaux. Image J. Hoffman et l'auteur.

Gauss. On récupère l'application de Gauss multi-valuée par intégration. Il y a donc une quadrature de plus, et donc un problème de périodes supplémentaire. On s'en réjouit, toute cette machinerie a été développée pour résoudre des problèmes de périodes !

Ce qui nous a pris le plus de temps, c'est de montrer que les configurations sont non dégénérées. En effet, les charges étant fixées, on ne pouvait pas utiliser d'argument de généralité. Les coefficients de la matrice jacobienne sont des fonctions compliquées des zéros des polynômes de Hermite, le miracle c'est que son déterminant est un entier. Il fallait comprendre pourquoi.

Au final, on construit (entre autres choses), pour chaque genre k , une famille à un paramètre de surfaces hélicoïdales $\mathcal{H}_{k,t}$ invariantes par un visage d'angle $2\pi t$ et de genre k dans le quotient. On montre que la famille existe pour t proche de $\frac{1}{2}$. On conjecture qu'elle existe pour tout $t > \frac{1}{2}$, et qu'elle converge quand $t \rightarrow \infty$ vers une hélicoïde de genre k non périodique. L'existence de ces hélicoïdes de genre k reste un problème ouvert.

2.5 Surfaces triplement périodiques [11]

Une surface minimale est triplement périodique si elle est invariante par trois translations indépendantes. Si on note Λ le réseau engendré par ces trois translations, elle donne par passage au quotient une surface minimale dans le 3-tore plat \mathbb{R}^3/Λ .

W. Meeks a proposé la conjecture suivante :

Conjecture 3 (Meeks) *Pour tout réseau Λ et tout entier $k \geq 3$, il existe une surface minimale plongée orientable de genre k dans \mathbb{R}^3/Λ .*

Les surfaces triplement périodiques classiques ayant beaucoup de symétries, elles vivent dans des 3-tores particuliers. En effet, pour un réseau Λ générique, les seules isométries de \mathbb{R}^3/Λ sont les translations et les symétries centrales.

W. Meeks a démontré que la conjecture était vraie en genre $k = 3$ en utilisant un argument variationnel de type min-max. On peut toujours obtenir des surfaces de genre plus grand en quotientant par un sous-réseau (ce qui est un peu triché) mais de cette façon on n'obtient que des surfaces de genre impair. Le cas du genre pair était donc ouvert.

J'ai résolu cette conjecture par l'affirmative, en suivant une idée d'Antonio Ros. Là encore, on colle des plans horizontaux et des caténoïdes mais on a une infinité de caténoïdes dans chaque couche, organisés de façon doublement périodique. Les points de la configuration vivent donc naturellement dans un 2-tore \mathbb{C}/Γ . Pour cette raison, les forces ne sont plus purement algébriques mais s'expriment en termes de fonctions elliptiques. La recherche de configurations équilibrées est donc un problème plus ardu.

2.6 Images [13]

Dans cette section, j'aimerais expliquer comment j'ai produit les images qui illustrent ce mémoire. Pour les exemples de Riemann avec des anses et les surfaces hélicoïdales de la section 2.4, figures 2, 3 et 7, la surface de Riemann est hyperelliptique. Il est donc facile d'écrire des formules explicites pour la représentation de Weierstrass, de résoudre numériquement le problème des périodes et de calculer une image au moyen d'un logiciel approprié.

En ce qui concerne les figures 5 et 6 la surface de Riemann n'est pas hyperelliptique, ni même donnée par une équation algébrique explicite. Pour obtenir des images, je suis resté dans le cadre des surfaces de Riemann à points doubles. Le problème était que les 1-formes de la représentation de Weierstrass sont définies abstraitement, en prescrivant leurs périodes. Il fallait une formule pour pouvoir les calculer numériquement. Je l'ai obtenue en représentant une 1-forme sous forme d'une série de Laurent dans chaque sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La condition d'être invariante par la règle d'identification $v_i w_i = t_i$ donne un système linéaire infini, d'inconnues les coefficients de ces séries, que l'on résout par itération. (En pratique on tronque les séries à un nombre fini de termes pour le calcul numérique.) En fait, ceci donne une démonstration constructive du théorème de Fay cité dans la section 2.1 dans le cas où on n'a que des sphères de Riemann.

Une fois qu'on sait calculer les 1-formes ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , il y a encore des équations à résoudre (problème des périodes, etc...). Par exemple, pour la

surface de la figure 6, il y a 72 équations à résoudre, et autant de variables. Il est clair qu'on ne résout pas numériquement un système de 72 équations non linéaires sans un minimum de méthode. Dans la construction théorique on résolvait les équations en utilisant le théorème des fonctions implicites. C'est un théorème constructif, qui donne une méthode pour calculer la solution par itération. C'est la méthode que j'ai utilisée pour résoudre numériquement les équations. Ce travail a donné lieu à une publication dans la revue *Experimental Mathematics* [13].

2.7 Méthode de Plateau/conjugaison [10]

Dans [10] et [12], on construit des surfaces minimales dont le domaine fondamental est de courbure totale infinie. Ces surfaces ne sont pas construites par collage, il serait d'ailleurs assez difficile de les construire par la Représentation de Weierstrass. En effet, elles ne sont pas paramétrées par des données méromorphes sur une surface de Riemann compacte, la représentation de Weierstrass a une singularité essentielle.

Nous utilisons la méthode de Plateau conjugaison de H. Karcher. Le grand avantage de cette méthode est que les arguments sont purement géométriques, il n'y a aucun calcul. Sa principale limitation est qu'on ne peut construire que des exemples ayant un domaine fondamental simplement connexe et bordé par des courbes de symétrie plane.

Rappelons la construction des *Saddle Towers*² de H. Karcher. Soit Ω un domaine convexe du plan, tel que son bord soit un polygone avec $2k$ cotés de longueur 1. Par le théorème de Jenkins Serrin [JS66], il existe une solution u à l'équation des surfaces minimales dans Ω , qui prend les valeurs alternativement $\pm\infty$ sur le bord. Le graphe de u est une surface minimale bordée par des droites verticales au dessus des sommets de Ω . La surface minimale conjuguée est bordée par des courbes de symétries horizontale dans les plans $x_3 = 0$ et $x_3 = 1$. En complétant par symétrie, on obtient une surface simplement périodique ayant $2k$ bouts de type Scherk, appelée *Saddle Tower* par H. Karcher.

Cette construction est remarquablement simple. En comparaison, il ne serait pas facile d'écrire la représentation de Weierstrass de ces surfaces, sauf dans les cas les plus symétriques. En variant les domaines et les données au bord, on peut construire une multitude de surfaces minimales périodiques. Le champion de ce type de constructions est H. Karcher.

²La traduction mot-à-mot ne donnant pas grand chose, j'ai préféré conserver le nom anglais

Notre contribution dans [10] a été de généraliser la construction ci-dessus au cas d'un domaine Ω convexe non borné, dont le bord est une ligne polygonale ayant une infinité de cotés de longueur 1. On obtient par cette méthode des *Saddle Towers* ayant une infinité de bouts de type Scherk. La seule difficulté était l'existence de la solution u prenant les valeurs $\pm\infty$ sur le bord. On l'obtient en considérant une exhaustion de Ω par des domaines compacts Ω_n , en résolvant un problème de Dirichlet sur Ω_n et en faisant $n \rightarrow \infty$. Les outils développés par L. Mazet dans sa thèse permettent de faire converger la solution. Il s'agit donc d'analyse.

Ces exemples sont parmi les premiers qui soient de courbure totale infinie de façon non triviale, c'est à dire que modulo toutes les symétries, le domaine fondamental ait encore une courbure totale infinie. Au moment où l'article était rédigé, le seul autre exemple connu était l'hélicoïde de genre 1. Il y en a maintenant d'autres [12, HP07]. Un autre intérêt de ces exemples est que ce sont des surfaces minimales de genre zéro dans la variété $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Il faut donc les rajouter à la liste des candidats pour la classification des surfaces minimales de genre zéro dans les 3-variétés plates, un projet dont je reparlerai dans la section 3.1

2.8 Surfaces minimales quasi-périodiques [12]

Dans [12], on ajoute des anses aux *Toroidal Halfplane Layers* de H. Kar-cher. Il n'y a pas de raison fondamentale pour vouloir ajouter des anses à ces surfaces. L'intérêt est qu'on est capable de le faire de façon quasi-périodique, exploit qui n'avait jamais été réalisé jusque là. Pour cette raison, je ne vais pas chercher à décrire les surfaces que l'on construit, mais juste la stratégie employée.

On part d'une surface périodique, que l'on peut donc voir comme une union de briques fondamentales $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$. (Ici, l'espace ambiant est $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, la surface se relève donc en une surface doublement périodique dans \mathbb{R}^3 .) On brise la périodicité en ajoutant des anses : pour chaque brique fondamentale, on peut décider d'ajouter une anse. Les surfaces que l'on construit sont donc indexées par $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Etant donnée une suite $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de zéros et de uns, on ajoute une anse dans la brique A_k si $v_k = 1$. Techniquement, on utilise là encore une méthode du type Plateau / conjugaison.

Pour chaque anse que l'on ajoute, on a un problème de périodes à résoudre, pour que la surface se referme bien quand on complète par symétrie. On a aussi un paramètre libre par anse. On résout d'abord ce problème de périodes pour un nombre fini n d'anses, en utilisant le théorème suivant :

Théorème de Poincaré Miranda : Soit $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. On suppose que $f_i \leq 0$ sur chaque face $x_i = 0$ de l'hypercube, et $f_i \geq 0$ sur chaque face $x_i = 1$. Alors f a au moins un zéro.

Il s'agit de la généralisation la plus naturelle du théorème des valeurs intermédiaires aux fonctions de plusieurs variables. Ensuite on fait $n \rightarrow \infty$, là encore des arguments d'analyse permettent de faire converger les solutions.

S'il y avait unicité de la solution au problème des périodes, alors une suite $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ périodique donnerait une surface périodique, et une suite quasi-périodique donnerait une surface quasi-périodique (en un sens à définir, je renvoie le lecteur à l'article). Malheureusement, le théorème de Poincaré Miranda ne garantit pas cette unicité. Ce que nous montrons, c'est que si la suite est quasi-périodique, alors parmi toutes les solutions au problème des périodes, il y en a qui donnent des surfaces quasi-périodiques. Il s'agit d'un argument du type Zorn.

Comme on le voit, on n'utilise pas de façon essentielle la quasi-périodicité lors de la construction, puisque celle ci marche pour toute suite $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Mais la quasi-périodicité est au coeur de certains développements récents sur les surfaces minimales [MPR06], il était intéressant de construire un tel exemple.

Ce qui serait spectaculaire, c'est de construire un exemple quasi-périodique qui ait des symétries impossibles pour les surfaces périodiques, comme les fameux quasi-cristaux en physique qui ont des symétries d'ordre 5.

3 Classification

3.1 Classification des surfaces minimales de genre zéro dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ [9]

Ce résultat est une petite partie d'un plus large programme, classifier les surfaces minimales de genre zéro dans les variétés plates de dimension 3. Si l'on rajoute l'hypothèse de courbure totale finie, la conjecture est la suivante.

Conjecture 4 *Soit M une surface minimale (complète, plongée, orientable) de genre zéro et de courbure totale finie dans une variété plate \mathbb{R}^3/G . Alors M se relève à \mathbb{R}^3 en l'une des surfaces suivantes : le plan, la caténoïde, l'hélicoïde, une surface de Scherk simplement ou doublement périodique, une Saddle Tower de H. Karcher ou une Twisted Saddle Tower de H. Karcher.*

Il y a au total 18 types de quotients \mathbb{R}^3/G , on en trouvera la liste dans [NS87]. Parmi ceux-ci, 10 sont compacts et n'admettent pas de surfaces minimale de

genre zéro. La classification dans le cas de \mathbb{R}^3 ($G = \{id\}$) est due à Lopez Ros [LR91]. Meeks et Lazard-Holy [LHM01] ont fait le cas où G est engendré par deux translations. Avec J. Pérez [9], nous avons terminé la classification dans le cas où G est engendré par une translation T . A l'heure actuelle, la classification est terminée sauf dans le cas où G est engendré par un vissage d'angle non nul.

Sans l'hypothèse de courbure totale finie dans le quotient, il faut rajouter à la liste des candidats les exemples de Riemann, les *Toroidal halfplane layers* de H. Karcher, les *Saddle Towers* avec une infinité de bouts que l'on a construites dans la section 2.7... Je ne me hasarderai pas à énoncer une conjecture. La classification des surfaces minimales plongées de genre zéro dans \mathbb{R}^3 vient d'être achevée par Meeks, Perez et Ros, il n'y a que le plan, la caténoïde, l'hélicoïde et les exemples de Riemann.

Soit M une surface minimale (sauf un plan) plongée dans $\mathbb{R}^3/\langle T \rangle \sim \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ de courbure totale finie et de genre zéro. On sait d'après [MR93] qu'une surface minimale de courbure totale finie dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ est soit à bouts plans, soit à bouts hélicoïdaux, soit à bouts de type Scherk. Le premier cas est impossible si M est de genre zéro. Dans le deuxième cas, M doit être une hélicoïde par [PR93]. Nous avons démontré que dans le troisième cas, M doit être une surface de Scherk simplement périodique ou une *Saddle Tower* de Karcher.

Les surfaces sont classifiées par leur polygone des flux : si M est une surface à $2k$ bouts de type Scherk (on sait que le nombre de bouts doit être pair), on peut lui associer un polygone convexe $F(M)$ à $2k$ cotés de longueur 1 de la façon suivante : soit u_i le vecteur unitaire horizontal qui donne la direction asymptote du i -ème bout. $F(M)$ est le polygone dont les sommets sont $0, u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3, \text{etc.}$ Il se referme car la somme des u_i est nulle par le théorème des résidus.

On montre que F est un difféomorphisme de l'ensemble des surfaces à $2k$ bouts sur l'ensemble des $2k$ -gones non spéciaux, voir définition 1.2 dans [10]. (Ce sont précisément les polygones qui vérifient les hypothèses du théorème de Jenkins Serrin.) La bijection réciproque est simplement l'application qui à un polygone associe une *Saddle Tower* par la méthode de Plateau / conjugaison, comme expliqué dans la section 2.7.

La stratégie est la même que dans l'article [MPR98] de Meeks, Perez et Ros. C'est une démonstration en trois étapes.

1. *L'application F est ouverte.* Ceci revient à dire qu'on peut toujours déformer un candidat en perturbant la direction asymptote des bouts. On

montre ce résultat en utilisant la représentation de Weierstrass et un théorème de l'application ouverte pour les fonctions holomorphes de plusieurs variables. C'est en fait le seul endroit où on utilise de façon cruciale le fait que le genre est nul.

2. *L'application F est propre* : Si on a une suite de candidats dont les polygones des flux convergent vers un polygone non spécial, on peut extraire une sous-suite qui converge. Ici on utilise de façon essentielle le fait que les surfaces sont plongées, et des arguments standard de *blow-up*. On retrouvera ce type de résultat de compacité dans la section 3.3.

3. *Unicité locale* : Pour un polygone Ω proche d'un polygone spécial, $F^{-1}(\Omega)$ est un singleton. On montre que quand le polygone des flux converge vers un polygone spécial, la surface dégénère en $k - 1$ surfaces de Scherk mises bout à bout. On est donc dans une situation de collage de surfaces de Scherk similaire à celle rencontrée dans la section 2.1. Le théorème des fonctions implicites donne l'unicité locale recherchée.

On déduit des points 1 et 2 que sur chaque composante, l'application F atteint tous les polygones non spéciaux, et du point 3 que toute composante contient des *Saddle Towers*. Comme les *Saddle Towers* forment un ensemble ouvert et fermé, on en déduit qu'il n'y a qu'une composante, celle des *Saddle Towers*.

3.2 Autre résultat de classification [8]

Dans [8], on classifie les surfaces minimales plongées doublement périodiques qui dans le quotient sont de genre un et ont un nombre fini de bouts parallèles. Il n'y a que les *Toroidal Halfplane Layers*, une famille à trois paramètres. La stratégie est la même que dans la section précédente.

Ce qui est intéressant c'est la diversité des dégénération possibles : caténoïde, hélicoïde, surfaces de Scherk simplement et doublement périodiques et exemples de Riemann peuvent être obtenus comme limites des *Toroidal Halfplane Layers*.

3.3 Résultats de compacité [6]

Dans [6], on démontre des résultats de compacité pour des familles de surfaces minimales de courbure totale finie dans \mathbb{R}^3 . Les questions qui motivent ce travail sont les conjectures 1 et 2 énoncées dans la section 2.3. On aimerait démontrer ces conjectures en suivant la stratégie de Meeks, Perez Ros

[MPR98], expliquée dans la section 3.1. L'article [6] établit les résultats de compacité pour ces conjectures, c'est à dire le deuxième point de la stratégie.

Dans le cas des surfaces de courbure totale finie dans \mathbb{R}^3 , l'application classifiante F devrait être celle qui à un candidat associe les croissances logarithmiques de ses bouts. On ne sait malheureusement pas démontrer que cette application est ouverte (premier point de la stratégie), c'est à dire qu'on peut toujours déformer un candidat en perturbant les croissances logarithmiques des bouts. En ce qui concerne l'unicité locale (troisième point), les résultats de collage de la section 2.3 doivent donner l'unicité voulue.

Comme on l'a vu, on ne peut pas construire de contreexemple aux conjectures 1 et 2 par collage de caténoïdes. Grosso modo, ce que l'on peut en conclure, c'est qu'une famille de contreexemples ne peut pas dégénérer en des caténoïdes. C'est l'idée de départ de [6] (ou comment recycler quelque chose qui n'a pas marché!).

Soit $(M_n)_n$ une suite de surfaces minimales complètes, plongées, de courbure totale finie dans \mathbb{R}^3 , et de topologie fixée. D'après le *théorème de compacité faible* d'A. Ros [Ros95], on peut extraire une sous-suite qui converge (en un sens faible) vers un ensemble fini de surfaces minimales $M_{1,\infty}, \dots, M_{k,\infty}$. Cette convergence signifie que la courbure se concentre dans des boules $B_{1,n}, \dots, B_{k,n}$, et qu'après des homothéties convenables, chaque $M_n \cap B_{i,n}$ converge (au sens fort) vers $M_{i,\infty}$. Si $k = 1$, alors la sous-suite converge vers $M_{1,\infty}$ au sens usuel, et il y a donc compacité. Si $k \geq 2$, on est dans une situation de collage des surfaces $M_{1,\infty}, \dots, M_{k,\infty}$ avec des plans horizontaux. Bien sur, il n'y a aucune raison que les surfaces limites soient des caténoïdes.

En faisant des homothéties convenables, on peut supposer que les centres des boules $B_{1,n}, \dots, B_{k,n}$ convergent vers des points p_1, \dots, p_k . Le résultat principal de [6] est une condition d'équilibre vérifiée par la configuration p_1, \dots, p_k . Lorsque toutes les surfaces limites sont des caténoïdes, on retrouve bien sur la condition d'équilibre nécessaire pour coller des caténoïdes.

Pour démontrer un résultat de compacité, il faut montrer que $k = 1$, c'est à dire qu'il n'y a pas de configuration équilibrée avec $k \geq 2$ points. On est ramené à des questions purement algébriques.

Dans le cas du collage, la condition d'équilibre venait du problème des périodes que l'on rencontrait en essayant de construire la surface. Ici c'est différent puisque les surfaces M_n existent déjà. On obtient la condition d'équilibre pour le point p_i en calculant de deux façons la partie horizontale du flux sur le bord de $M_n \cap B_{i,n}$ et en faisant $n \rightarrow \infty$. D'une part, ce flux est nul par le théorème de Stokes. D'autre part, chaque composante du bord est homologue

à un cercle contenu dans une région très plate de la surface. En faisant un développement asymptotique on peut calculer la limite du flux sur ce cercle. En faisant la somme de ces flux on obtient la condition d'équilibre $F_i = 0$.

D'un point de vue physique, le flux est la résultante des forces de tension superficielle exercée sur $M_n \cap B_{i,n}$ par le reste de la surface. Ce calcul donne donc une interprétation physique aux F_i : ce sont réellement des forces !

Une difficulté que l'on rencontre dans [6] est qu'on ne peut pas toujours garantir à la fois que tous les p_i soient finis et qu'ils soient tous distincts. Quand plusieurs p_i sont égaux, ils comptent comme un seul point dans la condition d'équilibre. En travaillant à une échelle plus grande, on peut séparer ces points et obtenir une autre condition d'équilibre, mais tous les autres points sont envoyés à l'infini et n'interviennent plus. Il y a donc la nécessité de travailler à plusieurs échelles différentes.

Une autre difficulté est que dans le théorème de compacité faible d'A. Ros, rien ne garantit que les surfaces limites soient observables à la même échelle. Il se peut très bien qu'à l'échelle où $M_n \cap B_{1,n}$ converge vers $M_{1,\infty}$, $M_n \cap B_{2,n}$ s'écrase sur un point. Le problème est qu'alors la condition d'équilibre ne verra pas le point p_2 , sa charge sera nulle.

3.4 Surfaces minimales bordées par deux courbes convexes [14]

Dans cette dernière section on s'intéresse aux surfaces minimales à bord. Soient Γ_1 et Γ_2 deux courbes fermées convexes dans deux plans horizontaux, disons $x_3 = 0$ et $x_3 = 1$, et M une surface minimale compacte de bord $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Shiffman [Shi56] a démontré que si M est topologiquement un anneau, alors M coupe les plans $x_3 = t$ selon des courbes convexes pour $0 \leq t \leq 1$. Mais est ce que d'autres types topologiques sont possibles ? W. Meeks conjecture que non :

Conjecture 5 (Meeks) *Si M est une surface minimale compacte bordée par deux courbes convexes dans des plans parallèles, alors M est un anneau.*

On sait que la conjecture est vraie si $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ a deux plans verticaux de symétrie, par la méthode de réflexion d'Alexandrov [Sch83]. On sait aussi qu'elle est vraie si Γ_2 est obtenue par translation verticale de Γ_1 , par un résultat d'A. Ros [Ros96]. A part ces résultats, le problème reste ouvert.

Une stratégie pour démontrer la conjecture serait de partir d'un éventuel contrexemple M , de le déformer en une famille à un paramètre M_t en rapprochant les plans (sans changer les courbes), et d'étudier ce qui se passe

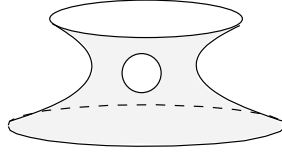


FIG. 8 – Est ce que deux courbes convexes peuvent border une surface minimale de genre 1 ?

quand $t \rightarrow 0$ (t est la distance entre les plans). C'est finalement la même stratégie que celle de Meeks Perez Ros [MPR98].

Expérimentalement, si on a un film de savon bordé par deux courbes convexes, il persiste si l'on rapproche les courbes. Malheureusement, on ne sait pas le démontrer. Bien sur, en faisant des expériences avec des films de savon, on ne manipule que des anneaux minimaux, stables qui plus est ! Donc il ne faut pas trop s'y fier pour le problème qui nous intéresse.

Dans [14], on montre des résultats de compacité pour ce problème. On suppose qu'on a une suite de surfaces minimales compactes de genre fixé $k \geq 1$, bordées par deux courbes convexes (fixées) dans des plans horizontaux à distance t_n l'un de l'autre, avec $t_n \rightarrow 0$. On montre que la courbure se concentre en $k + 1$ points p_1, \dots, p_{k+1} , avec une masse de -4π de courbure en chaque point. Ces points vérifient une condition d'équilibre, les forces sont données par la formule

$$F_i = \sum_{j \neq i} \frac{1}{p_i - p_j} + \sum_j \frac{\partial}{\partial z} (H_{p_j}(p_i) + H'_{p_j}(p_i)).$$

Dans cette formule, $H_p(z)$ et $H'_p(z)$ sont les parties régulières des fonctions de Green des domaines bordés par les deux courbes convexes. Physiquement, ce terme représente l'interaction électrostatique avec la charge induite sur le bord.

Il faut montrer qu'une position d'équilibre est impossible si Γ_1 et Γ_2 sont convexes. Sans l'hypothèse de convexité, ce n'est pas vrai, il y a des contrexemples. Il faut faire le lien entre la géométrie d'un domaine et les propriétés de sa fonction de Green : vaste domaine où la littérature est très abondante.

En genre $k = 1$, j'ai démontré qu'il n'y a pas de position d'équilibre. On en déduit que si les plans sont suffisamment proches, les deux courbes convexes ne peuvent pas border de surface minimale compacte de genre 1. En genre

$k \geq 2$, je n'ai obtenu que des résultats partiels, en faisant des hypothèses de symétrie supplémentaire.

Bibliographie

- [Ber74] Lipman Bers. Spaces of degenerating Riemann surfaces. In *Discontinuous groups and Riemann surfaces (Proc. Conf., Univ. Maryland, College Park, Md., 1973)*, pages 43–55. Ann. of Math. Studies, No. 79. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1974.
- [Cos89] C. Costa. Uniqueness of minimal surfaces embedded in \mathbb{R}^3 with total curvature 12π . *J. of Differential Geometry*, 30(3) :597–618, 1989.
- [DD94] A. Douady and R. Douady. *Changement de cadre à partir des surfaces minimales*. Didactique des mathématiques. IREM Paris VII, 1994.
- [Fay73] J.D. Fay. *Theta Functions on Riemann Surfaces*, volume 352 of *Lecture Notes in Mathematics*. 1973.
- [HK97] D. Hoffman and H. Karcher. Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature. In R. Osserman, editor, *Encyclopedia of Mathematics, Vol. 90, Geometry V*, pages 5–93. Springer-Verlag, 1997.
- [HKW93] D. Hoffman, H. Karcher, and F. Wei. The genus one helicoid and the minimal surfaces that led to its discovery. In *Global Analysis and Modern Mathematics*. Publish or Perish Press, 1993. K. Uhlenbeck, editor, p. 119–170.
- [HM90] D. Hoffman and W. H. Meeks. Embedded minimal surfaces of finite topology. *Annals of Math.*, 131 :1–34, 1990.
- [Hof90] D. Hoffman. Some basic facts, old and new, about triply periodic embedded minimal surfaces. In *Colloque de Physique*, 1990. Colloque No. 7, Supplément au Journal de Physique, Tome 51, December 1990, 197–208.
- [HP07] L Hauswirth and F Pacard. Higher genus Riemann minimal surfaces. *Invent. Math.*, 169(3) :569–620, 2007.
- [JS66] H. Jenkins and J. Serrin. Variational problems of minimal surface type II. Boundary value problems for the minimal surface equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 21 :321–342, 1966.
- [Kap90] N. Kapouleas. Complete constant mean curvature surfaces in Euclidean three space. *Annals of Math.*, 131 :239–330, 1990.
- [Kap97] N. Kapouleas. Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature. *J. Differential Geom.*, 47(1) :95–169, 1997.

- [Kar91] Hermann Karcher. Construction of higher genus embedded minimal surfaces. In *Geometry and topology of submanifolds, III (Leeds, 1990)*, pages 174–191. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.
- [LHM01] H. Lazard-Holly and W. H. Meeks. The classification of embedded doubly-periodic minimal surfaces of genus zero. *Invent. Math.*, 143 :1–27, 2001.
- [LR91] F. J. López and A. Ros. On embedded complete minimal surfaces of genus zero. *J. of Differential Geometry*, 33(1) :293–300, 1991.
- [Mas76] H. Masur. The extension of the weil-petersson metric to the boundary of teichmuller space. *Duke Math. Journal*, 43 :623–635, 1976.
- [MPR98] W. H. Meeks, J. Pérez, and A. Ros. Uniqueness of the Riemann minimal examples. *Invent. Math.*, 131 :107–132, 1998.
- [MPR06] W. Meeks, J. Perez, and A. Ros. Embedded minimal surfaces : removable singularities, local pictures and parking garage structures, the dynamics of dilation invariant collections and the characterization of examples of quadratic curvature decay. 2006. preprint.
- [MR93] W. H. Meeks and H. Rosenberg. The geometry of periodic minimal surfaces. *Comment. Math. Helvetici*, 68 :538–578, 1993.
- [NS87] V. V. Nikulin and I. R. Shafarevich. *Geometries and groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the Russian by M. Reid, Springer Series in Soviet Mathematics.
- [PR93] J. Pérez and A. Ros. Some uniqueness and nonexistence theorems for embedded minimal surfaces. *Math. Ann.*, 295(3) :513–525, 1993.
- [Ros95] A. Ros. Compactness of spaces properly embedded minimal surfaces with finite total curvature. *Indiana Univ. Math. J.*, 44(1) :139–152, 1995.
- [Ros96] A. Ros. Embedded minimal surfaces : forces, topology and symmetries. *Calc. Var.*, 4 :469–496, 1996.
- [Sch83] R. Schoen. Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces. *J. of Differential Geometry*, 18 :791–809, 1983.
- [Shi56] M. Shiffman. On surfaces of stationary area bounded by two circles, or convex curves, in parallel planes. *Annals of Math.*, 63 :77–90, 1956.
- [Woh91] M. Wohlgemuth. Higher genus minimal surfaces by growing handles out of a catenoid. *Manuscripta Math.*, 70 :397–428, 1991.
- [WW02] M. Weber and M. Wolf. Teichmuller theory and handle addition for minimal surfaces. *Annals of Math.*, 156 :713–795, 2002.