Corrigé de l'interro N° 3

Exercice 1. $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, 0 < x < \delta \Rightarrow f(x) > A$

Exercice 2. $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3-8}$

1. On doit resoudre $x^3 - 8 = 0$

$x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

Donc x^3-8 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Les fonctions x^2-4 et x^3-8 sont continues sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, et x^3-8 ne s'annule pas, donc g est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

2. On doit voir si $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ existe et est finie.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^3-8} = \dfrac{0}{0}$ est une F. I.

on met $x-2$ en facteur

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ (identité remarquable)

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 8 & x-2 \\ \cline{2-2}
-x^3 + 2x^2 & x^2 + 2x + 4 \\ \cline{1-1}
2x^2 - 8 & \\
-2x^2 + 4x & \\ \cline{1-1}
4x - 8 & \\
-4x + 8 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$g(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \dfrac{x+2}{x^2+2x+4}$

$\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \dfrac{2+2}{4+4+4} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

Donc on peut prolonger g par continuité en 2 en posant $g(2) = \frac{1}{3}$.

Exercice 3. Posons $f(x) = \cos x - e^x + 1$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car $\cos x$ et e^x sont continues.

$f(0) = \cos 0 - e^0 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1 > 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} - e^{\frac{\pi}{2}} + 1 = 0 - e^{\frac{\pi}{2}} + 1 < 0$

Par le T.V.I., il existe $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $f(\alpha) = 0$, c'est à dire $\cos\alpha = e^\alpha - 1$.

Exercice 4.
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ x + 2y + mz = 1 \end{cases}$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + mz = 1 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3y - 3z = 1 \\ 3y + (m-2)z = 1 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3y - 3z = 1 \\ (m+1)z = 0 \end{cases}$$

1er cas. Si $\boxed{m \neq -1}$ alors $z = 0$

$3y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}$

$x = y = \frac{1}{3}$

donc $S_m = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right) \right\}$ si $m \neq -1$

2nd cas : si $\boxed{m = -1}$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3y - 3z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

le système est compatible.

on prend z comme variable libre.

$$y = z + \frac{1}{3}$$

$$x = y - 2z = -z + \frac{1}{3}$$

$$S_{-1} = \left\{ \left(-z + \frac{1}{3} ; z + \frac{1}{3} ; z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

C'est la droite de $\mathbb{R}^3$ passant par $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right)$ de vecteur directeur $(-1; 1; 1)$.