CORRIGÉ DE L'INTERRO N°2

Exercice 1 , $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 4$

1) $P(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 4(-2) + 4 = -8 + 12 - 8 + 4 = 0$

donc -2 est racine de P.

$P'(x) = 3x^2 + 6x + 4$

$P'(-2) = 3(-2)^2 + 6(-2) + 4 = 12 - 12 + 4 = 4 \neq 0$

donc -2 est racine simple de P.

2)
$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +3x^2 & +4x & +4 & x+2 \\
\cline{5-5}
-x^3 & -2x^2 & & & x^2 + x + 2 \\
\cline{1-4}
 & x^2 & +4x & +4 & \\
 & -x^2 & -2x & & \\
\cline{2-4}
 & & 2x & +4 & \\
 & & -2x & -4 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$x^2 + x + 2 = 0$

$\Delta = 1 - 8 = -7$

$x_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$ $\qquad x_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$

Les racines de P sont -2 ; x_1 ; x_2

$P(x) = (x+2)\left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ sur $\mathbb{C}$

$P(x) = (x+2)(x^2 + x + 2)$ sur $\mathbb{R}$

($x^2 + x + 2$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ car $\Delta < 0$)

Exercice 2

a) f s'annule : $\exists x \in I \mid f(x) = 0$
négation : $\forall x \in I, \ f(x) \neq 0$

b) f est constante : $\exists c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, f(x) = c$
négation : $\forall c \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) \neq c$

c) f est bornée : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$
négation : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, |f(x)| > M$.

Exercice 3. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$
$$f(x) = 1 - \frac{2x+1}{x-1}$$

f injective ?
$$f(x_1) = f(x_2) \iff 1 - \frac{2x_1+1}{x_1-1} = 1 - \frac{2x_2+1}{x_2-1}$$
$$\iff \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1}$$
$$\iff (2x_1+1)(x_2-1) = (2x_2+1)(x_1-1)$$
$$\iff \cancel{2x_1x_2} - 2x_1 + x_2 - \cancel{1} = \cancel{2x_1x_2} - 2x_2 + x_1 - \cancel{1}$$
$$\iff -3x_1 = -3x_2$$
$$\iff x_1 = x_2$$
donc f est injective

f surjective ? Soit $y \in \mathbb{R}$.
On cherche un antécédent $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$$f(x) = y \iff 1 - \frac{2x+1}{x-1} = y$$
$$\iff 1 - y = \frac{2x+1}{x-1}$$

$\Leftrightarrow (1-y)(x-1) = 2x+1$

$\Leftrightarrow x-1-xy+y-2x-1 = 0$

$\Leftrightarrow x(-1-y)+y-2 = 0$

$\Leftrightarrow x(1+y) = y-2.$

Si $y \neq -1$: alors $x = \dfrac{y-2}{1+y}$ est l'antécédent de y.

Si $y=-1$: $x \times 0 = -3$

$0 = -3$ impossible.

donc -1 n'a pas d'antécédent.

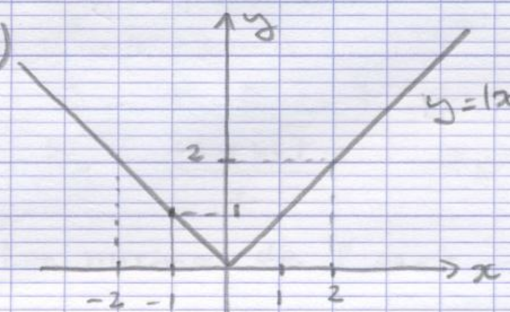
<u>f n'est pas surjective</u>, donc <u>pas bijective</u>.

<u>Exercice 4.</u>

1) $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ f(x)=y\}$

$f(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$

2)



Par lecture graphique :

$f([-1;2]) = [0;2]$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$

$f^{-1}(\{2\}) = \{-2;2\}$

$f^{-1}([-1;2]) = [-2;2]$