Corrigé de l'interro 1

Exercice 1. Notons $P(n)$ la proposition "$2^n \leq n!$"

Initialisation : $n=4$

$2^4=16$

$4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

$16<24$ donc $P(4)$ est vraie.

Hérédité. On se donne un entier $n\geq 4$ tel que $P(n)$ est vraie. On doit montrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire : $2^{n+1} \leq (n+1)!$ (objectif

$2^{n+1} = 2\times 2^n$

$(n+1)! = (n+1)\times n!$

On sait que $2^n \leq n!$ (hypothèse)

$2 \leq n+1$ car $n\geq 4$ donc $n+1\geq 5$

donc $2\times 2^n \leq (n+1)\times n!$

$2^{n+1} \leq (n+1)!$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n\geq 4$.

Exercice 2. $S = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k}(-2)^k = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} 1^{11-k} (-2)^k$

formule du binôme avec $a=1$, $b=-2$, $n=11$

$S = (1-2)^{11} = (-1)^{11} = -1.$

Exercice 3. a) $|z| = \sqrt{(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$

$z = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $\qquad \theta = \frac{3\pi}{4}$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

b) $z^{12} = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{12}$

$= (\sqrt{2})^{12} \left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{12}$

$= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{12} e^{i\frac{3\pi}{4}\times 12}$

$= 2^{6} e^{i9\pi}$

$= 64\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

$= -64$

c) $w_1 = \sqrt{2}^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$w_2 = \sqrt{2}^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{3\pi}{12} + i\frac{8\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$

$w_3 = \sqrt{2}^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{3\pi}{12} + i\frac{16\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{19\pi}{12}}$

Exercice 4. a) On doit résoudre $z^2 = 3 - 4i$

On cherche z sous la forme $z = x + iy$

$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$

par identification :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ 2xy = -4 & (2) \end{cases}$$

$|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$|z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = 5 \qquad (3)$

(1)+(3) : $2x^2 = 3+5 = 8$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

(3)−(1) $2y^2 = 5-3 = 2$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

De plus, d'après (2), $xy < 0$ donc x et y sont de signes opposés donc il y a deux solutions :

$x = 2,\ y = -1$ ou $x = -2,\ y = 1$.

$z_1 = 2 - i$ $z_2 = -2 + i$

b) $z^2 + iz - 1 + i$

$a = 1$

$b = i$

$c = -1 + i$

$\Delta = b^2 - 4ac = i^2 - 4(-1+i) = -1 + 4 - 4i = 3 - 4i$

Soit δ une racine carrée de Δ.

Par a), on peut choisir $\delta = 2 - i$

Les solutions sont

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{-i+2-i}{2} = 1 - i$$

$$z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-i-(2-i)}{2} = \frac{-i-2+i}{2} = -1.$$