Etudes de fonctions

1) $\boxed{f(x) = x^3 - 3x + 1.}$

f est une fonction polynôme donc est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 1 = -x^3 + 3x + 1$

f n'est ni paire, ni impaire.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

$f'(x) = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} x^3 - 3x + 1$ F.I $\infty - \infty$

$= \lim\limits_{x \to \infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$

$= \infty \times (1 + 0 + 0)$

$= \infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \times \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= -\infty \times (1 + 0 + 0)$$

$$= -\infty.$$

Recherche d'asymptote oblique en ∞

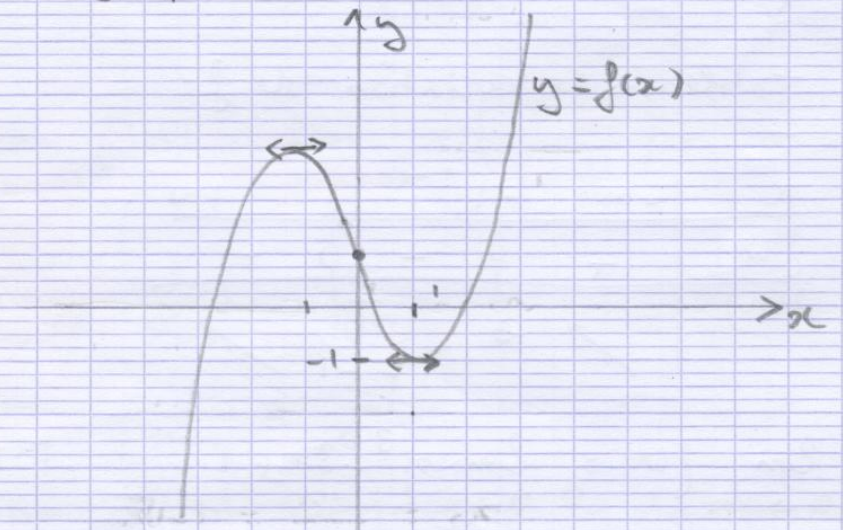
$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{x} = \lim_{x \to \infty} x^2 - 3 + \frac{1}{x}$$

$$= +\infty$$

donc il n'y a pas de droite asymptote en $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} x^2 - 3 + \frac{1}{x} = +\infty$$

donc il n'y a pas non plus de droite asymptote en $-\infty$.



$f(0) = 1$ $\quad$ $f'(0) = -3.$

2) $\boxed{f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

x^2+1 et $x-1$ sont continues et derivables sur $\mathbb{R}$ car ce sont des polynômes.
f est donc continue et derivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ en tant que quotient de deux fonctions derivables dont le denominateur ne s'annule pas.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x-1} = -\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$$

f n'est ni paire, ni impaire.

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1\times(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x^2-2x-1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4\times(-1) = 8 \qquad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$

$$x_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$$

$$f(1+\sqrt{2}) = \frac{(1+\sqrt{2})^2+1}{1+\sqrt{2}-1} = \frac{1+2\sqrt{2}+2+1}{\sqrt{2}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}+2$$

$$f(1-\sqrt{2}) = \frac{1-2\sqrt{2}+2+1}{1-\sqrt{2}-1} = \frac{4-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}+2$$

x		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$-2\sqrt{2}+2$	$\searrow -\infty$	$\|\|$	$+\infty \searrow$	$2\sqrt{2}+2$	$\nearrow +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x-1} \quad \text{F.I. } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} x \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \infty \times \left(\frac{1+0}{1-0}\right)$$

$$= \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Donc $\mathcal{C}_f$ est asymptote à la droite verticale d'équation $x = 1$ pour $x \to 1$.

Recherche d'une asymptote oblique pour $x \to +\infty$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x}$$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-1} - x$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x(x-1)}{x-1}$$

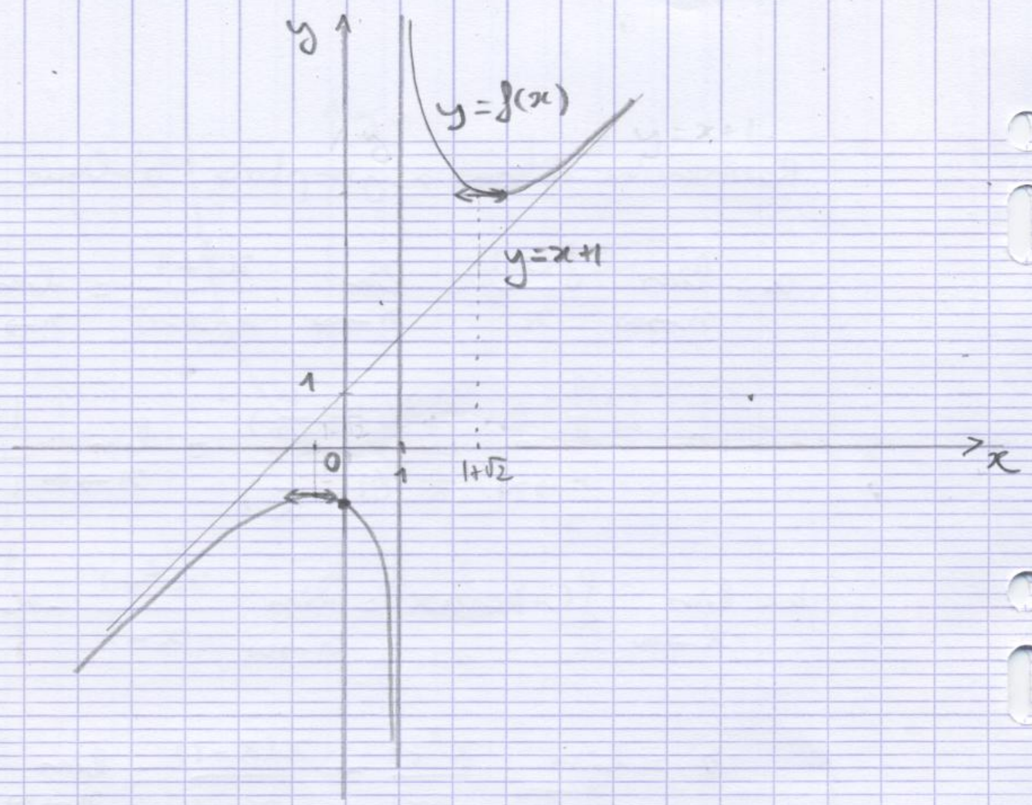
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

$a=1$, $b=1$.

Donc $\mathcal{C}_f$ est asymptote à la droite d'equation $y = x+1$ quand $x \to \infty$.

Même chose pour $x \to -\infty$.



3) $\boxed{f(x) = x^2 e^{-x}}$

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car x^2 et e^{-x} le sont.

$f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)} = x^2 e^{x}$

f n'est ni paire, ni impaire.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x e^{-x} + x^2 e^{-x} \times (-1) \\ &= e^{-x}(2x - x^2) \\ &= x e^{-x}(2 - x) \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc f' s'annule en $x = 0$ et $x = 2$ et est du signe de $x(2-x)$

$f(0) = 0$

$f(2) = 2^2 e^{-2} = \dfrac{4}{e^2}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$ F.I. $\infty \times 0$

Par la règle de croissance comparée,

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x} = 0.$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = \infty \times \infty = \infty$

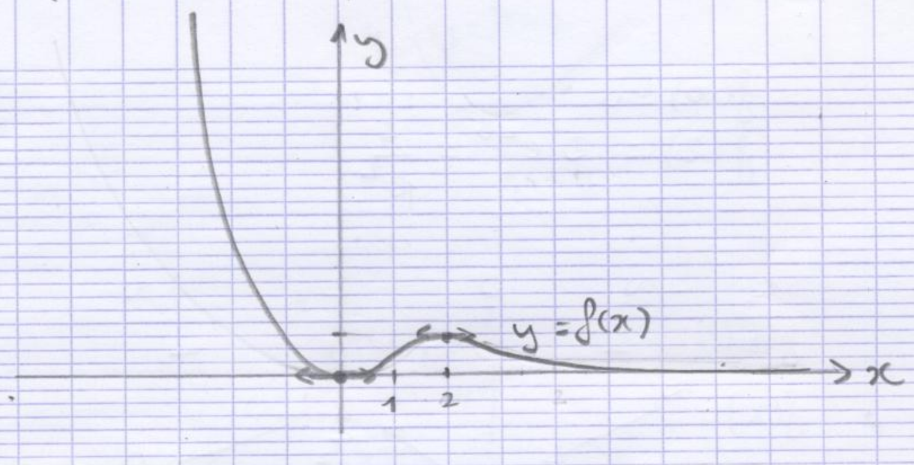
$\mathcal{C}_f$ est asymptote à la droite $y = 0$ quand $x \to +\infty$.

<u>Recherche d'une asymptote oblique pour $x \to -\infty$</u>

$a = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x e^{-x}$

$= -\infty \times \infty = -\infty$

donc il n'y a pas de droite asymptote quand $x \to -\infty$


y
y = f(x)
x
1
2