Fin de l'exercie " Étude d'une suite recurrente "

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \end{cases} \qquad f(x) = \sqrt{6+x}$$

3) Posons P_n la propriété " $u_{n+1} \geqslant u_n$ ".
Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Si $n = 0$:

$u_0 = 0$

$u_1 = \sqrt{6} \geqslant u_0$. donc P_0 est vraie.

Hérédité, on se donne un entier $n \geqslant 0$ tel que P_n est vraie. on doit montrer que P_{n+1} est vraie.

On sait que $u_{n+1} \geqslant u_n$ (hypothèse P_n)
f est croissante donc

$$f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n)$$
$$\sqrt{6+u_{n+1}} \geqslant \sqrt{6+u_n}$$
$$u_{n+1+1} \geqslant u_{n+1}$$

donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion. par récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \geqslant 0$.
Donc (u_n) est croissante.

4) D'apres l'étude de f, on a
$f([0;3]) = [\sqrt{6};3] \subset [0;3]$
Donc $[0;3]$ est stable par f.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;3]$
Donc (u_n) est majorée par 3.
La suite (u_n) est croissante majorée donc converge.

Posons $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$

$u_{n+1} = f(u_n)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(u_n)$

$\Rightarrow \ell = f(\ell)$ car f est continue

Donc $\boxed{\ell = 3}$ (seul point fixe de f)