Corrigé de l'examen 2016/2017

Exercice 1

1) $\forall y \in \mathbb{R}, \ \exists x \in \mathbb{R}, \ f(x) < f(y)$
(f n'a pas de minimum)

2) $f'(x) = \cos(2\pi x) \times 2\pi$
$f'(1) = \cos(2\pi) \times 2\pi = \cos(0) \times 2\pi = 2\pi$

3) $z \neq 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{255} z^k = \frac{1 - z^{256}}{1 - z}$: somme de 256 premiers termes d'une suite géométrique de raison $z \neq 1$.

$z^5 = 1$
$256 = 255 + 1 = 5 \times 51 + 1$
$z^{256} = z^{5 \times 51 + 1} = (z^5)^{51} \times z = 1^{51} \times z = z$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{255} z^k = \frac{1 - z}{1 - z} = 1.$

Exercice 2

1) $f(x) = x \iff \dfrac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1} = x$

$\iff x^3 + 3x = x(3x^2 + 1)$
$\iff x^3 + 3x = 3x^3 + x$
$\iff 2x^3 - 2x = 0$
$\iff x(x^2 - 1) = 0$
$\iff x \in \{0; 1; -1\}$

Les points fixes de f sont 0; 1 et -1.

2) x^3+3x et $3x^2+1$ sont derivables sur $\mathbb{R}$
car ce sont des polynomes.
$3x^2+1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ car
$x^2 \geqslant 0$ donc $3x^2+1 \geqslant 1$.
donc $f(x)$ est derivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2+3)(3x^2+1)-(6x)(x^3+3x)}{(3x^2+1)^2}$$

$$= \frac{9x^4+3x^2+9x^2+3-6x^4-18x^2}{(3x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3x^4-6x^2+3}{(3x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3(x^4-2x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3(x^2-1)^2}{(3x^2+1)^2}$$

$$= 3\left(\frac{x^2-1}{3x^2+1}\right)^2$$

3) $f(-1) = -1$ (question 1)
$f'(-1) = 0$
donc la tangente en $x=-1$ a pour équation
$y = -1$. (droite horizontale).

$f(0) = 0$
$f'(0) = 3$
donc la tangente en $x=0$ a pour équation
$y = 3x$

$f(1) = 1$
$f'(1) = 0$
donc la tangente en $x=1$ a pour équation $y = 1$.

4) $f' \geq 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3+3x}{3x^2+1} \quad \text{F.I. } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3(1+\frac{3}{x^2})}{x^2(3+\frac{1}{x^2})}$$

$$= \lim_{x \to \infty} x\left(\frac{1+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \infty \times \frac{1}{3}$$

$$= \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\left(\frac{1+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}\right) = -\infty \times \frac{1}{3} = -\infty$$

5) <u>Recherche d'une asymptote oblique pour $x \to +\infty$</u>

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3+3x}{x(3x^2+1)} \quad \text{F.I. } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3(1+\frac{3}{x^2})}{x^3(3+\frac{1}{x^2})}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{3}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} f(x) - \frac{1}{3}x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3+3x}{3x^2+1} - \frac{1}{3}x$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3+3x-\frac{1}{3}x(3x^2+1)}{3x^2+1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^3}+3x-\cancel{x^3}-\frac{1}{3}x}{3x^2+1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{8}{3}x}{3x^2+1} \qquad \text{F.I. } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{8}{3}x}{x^2(3+\frac{1}{x^2})}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{8}{3}}{x(3+\frac{1}{x^2})} = 0.$$

Donc $\mathcal{C}_f$ est asymptote à la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x$ quand $x \to +\infty$.

De plus, $f(x) - \frac{1}{3}x = \frac{\frac{8}{3}x}{3x^2+1} > 0$ si $x > 0$

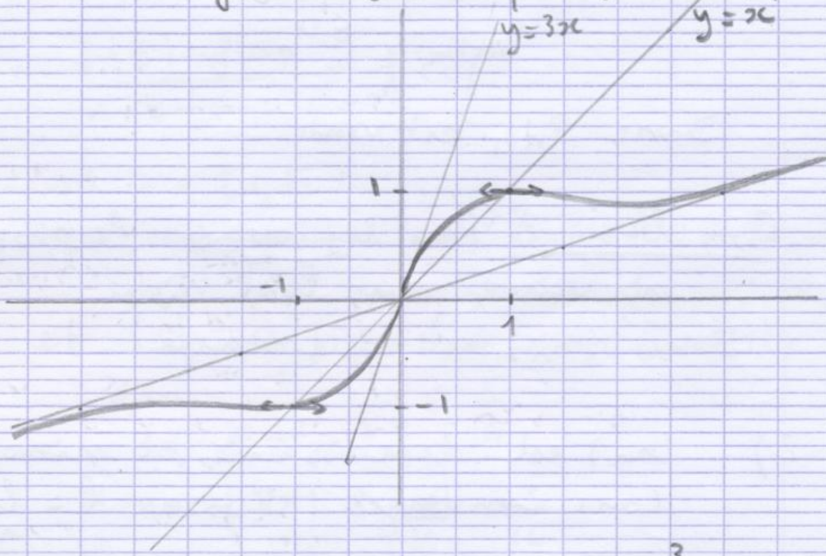
donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'asymptote.

Quand $x \to -\infty$: le même calcul donne $a = \frac{1}{3}$ et $b = 0$. On a la même droite asymptote. Mais $f(x) - \frac{1}{3}x < 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de l'asymptote.

6) Remarque. $f(-x) = \dfrac{(-x)^3 + 3(-x)}{3(-x)^2+1} = \dfrac{-x^3 - 3x}{3x^2+1} = -f(x)$

donc f est impaire.

$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $(0,0)$.



Partie B. 1) $u_1 = f(\sqrt{2}) = \dfrac{(\sqrt{2})^3 + 3\sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2+1} = \dfrac{2\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{6+1}$

$= \dfrac{5}{7}\sqrt{2} < \sqrt{2}$

$u_1 < u_0$

Montrons par récurrence sur n la propriété P_n : "$u_{n+1} \leq u_n$"

Initialisation. Si $n = 0$, on a vu que $u_1 < u_0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité. On se donne un entier $n \geqslant 0$ tel que P_n est vraie. On doit montrer qu'alors P_{n+1} est vraie.

P_n est vraie donc $u_{n+1} \leq u_n$

f est croissante donc $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$

or $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$

Donc $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

$u_{(n+1)+1} \leq u_{n+1}$

Donc P_{n+1} est vraie.

<u>Conclusion</u> Par récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \geq 0$.

Donc (u_n) est décroissante.

2) (u_n) est décroissante et minorée (par 1) donc converge. Posons $l = \lim_{n \to \infty} u_n$

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} u_{n+1}}_{= \, l} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(u_n)}_{= \, f(l)} \quad \text{(car } f \text{ est continue)}$$

Donc $l = f(l)$

Par la question A 1, $l \in \{-1; 0; 1\}$

Comme $l \geq 1$, c'est que $\boxed{l = 1}$.

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 1.$$

3). T.A.F.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

4) Soit $x \in [1, \sqrt{2}]$

Alors $1 \leq x^2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2-1 \leq 1 \Rightarrow (x^2-1)^2 \leq 1$

et $3x^2+1 \geqslant 3+1=4$ donc $(3x^2+1)^2 \geqslant 16$

donc $\dfrac{1}{(3x^2+1)^2} \leq \dfrac{1}{16}$

donc $f'(x) \leq \dfrac{3\times 1}{16} = \dfrac{3}{16}$.

5) On applique le T.A.F. avec $a=1$ et $b=u_n$.

Il existe $c_n \in]1, u_n[$ tel que

$$\frac{f(u_n)-f(1)}{u_n-1} = f'(c_n)$$

or $f(1)=1$

$f(u_n)=u_{n+1}$

$$u_{n+1}-1 = f'(c_n)(u_n-1)$$

$$\Rightarrow |u_{n+1}-1| = |f'(c_n)| \times |u_n-1|$$

Or $|f'(c_n)| \leq \frac{3}{16}$ donc $\boxed{|u_{n+1}-1| \leq \frac{3}{16}|u_n-1|}$

Par récurrence on obtient $|u_n-1| \leq \left(\frac{3}{16}\right)^n |u_0-1|$

Exercice 3.

1) $\det A_m = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$, $\; L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1+2m \\ m+1 & 0 & m+1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{m} \end{vmatrix}$ on développe / C_2

$= -1 \begin{vmatrix} 3 & 1+2m \\ m+1 & m+1 \end{vmatrix}$ on sort $m+1$

$= -(m+1) \begin{vmatrix} 3 & 1+2m \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= -(m+1)(3-1-2m)$

$= -(m+1)(2-2m)$

$= 2(m+1)(m-1) \qquad = 2(m^2-1)$

$\det A_0 = -2$

$\det(2A_0) = 2^3 \det(A_0) = -16$

$\det(A_0{}^3) = (\det(A_0))^3 = (-2)^3 = -8$

2) A_m inversible $\Leftrightarrow \det(A_m) \neq 0$

$\Leftrightarrow m^2 \neq 1$

$\Leftrightarrow m \neq 1$ et $m \neq -1$.

3) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ mx - y + z = -m \\ x + y + mz = m \end{cases}$ (S_m)

4) (S_0) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$\det(A_0) = -2 \neq 0$ donc A_0 est inversible et (S_0) a une unique solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_0^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5) $\det(A_1) = 0$ donc A_1 n'est <u>pas</u> inversible. On sait (cours) que (S_1) a soit aucune, soit une infinité de solutions. Pour le savoir, il faut résoudre le système.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y = -1 \\ 3y = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y = -1 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

$0 = 4$ impossible. Le système est incompatible. $S_1 = \emptyset$

Exercice 4. $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$

1) On suppose que $f(z_1) = f(z_2)$.
On doit montrer qu'alors $z_1 = z_2$

$$\frac{z_1+i}{z_1-i} = \frac{z_2+i}{z_2-i} \iff (z_1+i)(z_2-i) = (z_2+i)(z_1-i)$$

$$\iff z_1z_2 - iz_1 + iz_2 + 1 = z_1z_2 - iz_2 + iz_1 + 1$$

$$\iff -2iz_1 + 2iz_2 = 0$$
$$\iff z_1 = z_2.$$

Donc f est injective.

2) Soit $w \in \mathbb{C}$. On cherche un antécédent $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$ tel que $f(z) = w$

$$\frac{z+i}{z-i} = w \iff z+i = w(z-i) \qquad (\text{inconnue} : z)$$
$$\iff z - zw = -i - wi$$
$$\iff z(1-w) = -i(1+w)$$

- si $w \neq 1$: $z = -i\left(\dfrac{1+w}{1-w}\right)$

- si $w = 1$: $0 = -2i$ impossible.
Donc 1 n'a pas d'antécédent.
$f : \mathbb{C}\setminus\{i\} \to \mathbb{C}$ n'est pas surjective

3) on pose $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

$$|f(z)| = 1 \iff |z+i| = |z-i|$$
$$\iff |z+i|^2 = |z-i|^2$$
$$\iff |x + i(y+1)|^2 = |x + i(y-1)|^2$$
$$\iff x^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2$$
$$\iff x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$
$$\iff 4y = 0$$
$$\iff y = 0$$

Donc $S = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0 \} = \mathbb{R}$.

4) on pose encore $z = x + iy$

$$f(z) = \frac{x+iy+i}{x+iy-i}$$

on doit mettre ce nombre sous forme algébrique

$$= \frac{(x+iy+i)(x-iy+i)}{(x+iy-i)(x-iy+i)}$$
$$= \frac{(x+i)^2 - (iy)^2}{x^2 + (y-1)^2}$$
$$= \frac{x^2 + 2ix - 1 + y^2}{x^2 + (y-1)^2}$$
$$= \underbrace{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}}_{\mathrm{Re}(f(z))} + i \underbrace{\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}}_{\mathrm{Im}(f(z))}$$

Donc $f(z) \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(f(z)) = 0 \iff x = 0$

$S = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0 \} = i\mathbb{R}$.