Exercice 6

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix}$$

$= a(b-a)(c-b)(d-c)$ (déterminant triangulaire)

Generalisation :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1(a_2-a_1)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})$$

Exercice 9 (plus difficile)

$P(X) = X^2 + X - 2$

$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

On définit la matrice $P(A) = A^2 + A - 2I_p$.

P annule A veut dire que $P(A) = O_p$

1) $A^2 + A - 2I_p = 0 \iff A^2 + A = 2I_p$

$\iff A(A + I_p) = 2I_p$

$\iff A \times \frac{1}{2}(A + I_p) = I_p$

donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_p)$

2) on fait la division euclidienne de X^n par P :

$X^n = (X^2 + X - 2)Q(X) + R(X)$

avec $\deg(R) \leq 1$ donc $R(X) = aX + b$

on calcule les racines de P.

$\Delta = 1 + 2 \times 4 = 9 = 3^2$

$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$

donc $1^n = 0 \times Q(1) + R(1) \Rightarrow R(1) = 1$

$(-2)^n = 0 \times Q(-2) + R(-2) \Rightarrow R(-1) = (-2)^n$

on obtient le système

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -2a + b = (-2)^n \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$

$$\iff \begin{cases} a + b = 1 \\ 3b = (-2)^n + 2 \end{cases}$$

$b = \frac{(-2)^n + 2}{3} \qquad a = 1 - b = \frac{3 - (-2)^n - 2}{3} = \frac{1 - (-2)^n}{3}$

donc $R(X) = \left(\dfrac{1-(-2)^n}{3}\right)X + \left(\dfrac{2+(-2)^n}{3}\right)$

on remplace X par A :

$$A^n = \underbrace{(A^2+A-2I_p)}_{0_p}\,Q(A) + R(A)$$

$$\boxed{A^n = \left(\dfrac{1-(-2)^2}{3}\right)A + \left(\dfrac{2+(-2)^n}{3}\right)I_p}$$

Exercice 10

1) On suppose qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$
alors $\det(BA) = I_n$
$\Rightarrow \det(B)\det(A) = \det(I_n) = 1$
donc $\det(A) \neq 0$
donc A est inversible
on multiplie à droite par A^{-1} :
$BAA^{-1} = I_n A^{-1}$
$B = A^{-1}$

2) on suppose par l'absurde que A est inversible
et on multiplie à gauche par A^{-1} :
$A^{-1}AX = A^{-1}0_{n,1}$
$I_n X = 0_{n,1}$
$X = 0_{n,1}$ contredit l'hypothèse $X \neq 0_{n,1}$.
donc A n'est pas inversible
(C'est en fait un raisonnement par contraposée).

Exercice 11.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ $\quad C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$ $\quad$ on développe $/L_1$

$= (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c^2-a^2) - (c-a)(b^2-a^2)$
$= (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a)$
$= (b-a)(c-a)\left[(c+a) - (b+a)\right]$
$= (b-a)(c-a)(c-b)$

Le déterminant est non nul si et seulement si $a \neq b$ et $b \neq c$ et $c \neq a$.

(Ce déterminant s'appelle Van der Monde)