Exercices du chapitre 5

Exercice 4   4) f est continue en a. On utilise la définition de la continuité en prenant $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a-\delta < x < a+\delta \Rightarrow f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$$

or $f(a) - \varepsilon = f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2}$

Donc pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$, $f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$.
On prend $\eta = \delta$.

Exercice 5. 1) $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car c'est la composée de la fonction $\frac{1}{x}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^*$ et de la fonction $\sin$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas (vu en cours)

  donc f n'est pas continue en 0

2) $g(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- g est continue sur $\mathbb{R}^*$ car c'est le produit de la fonction f et de la fonction x, toutes deux continues sur $\mathbb{R}^*$.

- Montrons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$.

On a $|\sin(\frac{1}{x})| \leq 1$

donc $|x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$

donc $-|x| \leq x \sin(\frac{1}{x}) \leq |x|$

$\lim\limits_{x \to 0} |x| = \lim\limits_{x \to 0} -|x| = 0$ donc par le theoreme des gendarmes, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g(x) = 0 = g(0)$, g est continue en 0.

<u>Ex6</u> f est bornee donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$.

En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \in \mathbb{R}$ donc $|f(g(x))| \leq M$.

Donc $f \circ g$ est bornee (par M).

Ensuite g est continue donc bornee sur $[-M; M]$ (theoreme 3.5 du poly)

Donc il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [-M, M]$, $|g(x)| \leq N$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-M; M]$ donc $|g(f(x))| \leq N$.

Donc $g \circ f$ est bornee sur $\mathbb{R}$ (par N)