CHAPITRE 2

$\boxed{\text{Ex 4}}$ • Si $|z| \geq |z'|$ alors $|z| - |z'| \geq 0$

donc $\big| |z| - |z'| \big| = |z| - |z'|$

On écrit $z = (z - z') + z'$

Par l'inégalité triangulaire :

$|z| \leq |z - z'| + |z'|$

donc $|z| - |z'| \leq |z - z'|$

$\big| |z| - |z'| \big| \leq |z - z'|$

• Si $|z| \leq |z'|$ on fait le même raisonnement en échangeant les rôles de z et z'.

$\boxed{\text{Ex 5}}$ 2) On utilise les formules d'Euler :

$$\cos^3\theta \sin^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$$

Formule du binôme : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}}{2^3}$$

$$= \frac{e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}}{8}$$

$$\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta} - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}}{(2i)^2}$$

$$= \frac{e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}}{-4}$$

$$\cos^3\theta \sin^2\theta = \frac{-1}{32}\left(e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}\right)\left(e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{32}\big(e^{5i\theta} - 2e^{3i\theta} + e^{i\theta} + 3e^{3i\theta} - 6e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} - 6e^{-i\theta} + 3e^{-3i\theta} + e^{-i\theta} - 2e^{-3i\theta} + e^{-5i\theta}\big)$$

$$\cos^3\theta \sin^2\theta = -\frac{1}{32}\left(e^{5i\theta}+e^{-5i\theta}+e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}-2e^{i\theta}-2e^{-i\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\left(\frac{e^{5i\theta}+e^{-5i\theta}}{2}\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{8}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\cos(5\theta)-\frac{1}{16}\cos(3\theta)+\frac{1}{8}\cos\theta$$

$\boxed{\text{Ex 6}}$ 1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ si $z \neq 1$

(somme des termes d'une suite géométrique)

2) $$S = \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} Re(e^{ik\theta})$$

$$= Re\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n}(e^{i\theta})^k$$

$$= \frac{1-(e^{i\theta})^{n+1}}{1-e^{i\theta}}$$ si $e^{i\theta} \neq 1$, $\theta \neq 0 \ [2\pi]$

$$= \frac{1-e^{(n+1)i\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

On doit mettre cette fraction sous forme algébrique.

$$\overline{1-e^{i\theta}} = 1-e^{-i\theta}$$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{(1-e^{(n+1)i\theta})(1-e^{-i\theta})}{(1-e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})}$$

$$= \frac{1-e^{-i\theta}-e^{(n+1)i\theta}+e^{ni\theta}}{1-e^{-i\theta}-e^{i\theta}+1}$$

$$= \frac{1-e^{-i\theta}-e^{(n+1)i\theta}+e^{ni\theta}}{2-2\cos\theta}$$

on prend la partie réelle:

$$S = \frac{1-\cos\theta-\cos(n+1)\theta+\cos(n\theta)}{2-2\cos\theta} \quad \text{si } \theta \neq 0 \,[2\pi]$$

Si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$: alors $\cos k\theta = 1$ donc

$$S = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \quad \text{car il y a } n+1 \text{ fois } 1.$$

$\boxed{\text{Ex } 9}$ 3) $z^{11} = \bar{z}$

On procède par analyse/synthèse.

<u>Analyse</u>: si $z^{11} = \bar{z}$ alors $|z^{11}| = |\bar{z}|$

donc $|z|^{11} = |z|$

$|z|(|z|^{10}-1) = 0$

donc $|z| = 0$ ou $|z|^{10} = 1$

$z = 0$ ou $|z| = 1$.

Si $|z| = 1$: $z\bar{z} = 1$ donc $\bar{z} = \frac{1}{z}$

$$z^{11} = \bar{z} \iff z^{11} = \frac{1}{z}$$

$$\iff z^{12} = 1.$$

$$\iff z = e^{i\frac{2\pi k}{12}}$$

On a procédé par implication. Il faut donc verifier que les solutions qu'on a trouvées verifient bien l'équation : c'est la <u>synthese</u>.

- $z = 0$ est bien solution
- Si $z = e^{i\frac{2\pi k}{12}}$

$$\frac{z^{11}}{\bar{z}} = \frac{e^{i\frac{2\pi k}{12}\times 11}}{e^{-i\frac{2\pi k}{12}}} = e^{i\frac{2\pi k}{12}\times 11 + i\frac{2\pi k}{12}}$$

$$= e^{i\frac{2\pi k}{12}\times(11+1)}$$

$$= e^{i2\pi k}$$

$$= 1$$

donc $z^{11} = \bar{z}$

Conclusion : $S = \{0\} \cup \{e^{i\frac{2\pi k}{12}} \mid 0 \leq k \leq 11\}$

$\boxed{\text{Ex 13}}$ $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0$

$\Delta = (-2\cos\alpha)^2 - 4 = 4\cos^2\alpha - 4$
$= 4(\cos^2\alpha - 1)$
$= -4\sin^2\alpha < 0$

$$z_1 = \frac{2\cos\alpha + i2\sin\alpha}{2} = e^{i\alpha}$$

$$z_2 = \frac{2\cos\alpha - i2\sin\alpha}{2} = e^{-i\alpha}$$

$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = (x - e^{i\alpha})(x - e^{-i\alpha})$
factorisation sur $\mathbb{C}$.

$x^2 - 2x\cos\alpha + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Ex 15}}$ vu en cours (réponse à la question de Marine)

$\boxed{\text{Ex 16}}$ $P - Q$ est un polynôme de degré $\leq n$ qui a au moins $n+1$ racines.

Un polynôme de degré d a au plus d racines, sauf le polynôme nul.

Donc la seule possibilité et que $P - Q$ est le polynôme nul.
Donc $P = Q$.