CHAPITRE 1.

$\boxed{\text{Ex 5}}$. $f(x) = |x+1| - |2x-1|$

1) Si $x \geqslant -1$: $x+1 \geqslant 0$ donc $|x+1| = x+1$

Si $x \leq -1$: $x+1 \leq 0$ donc $|x+1| = -(x+1)$

Si $x \geqslant \frac{1}{2}$: $2x-1 \geqslant 0$ donc $|2x-1| = 2x-1$

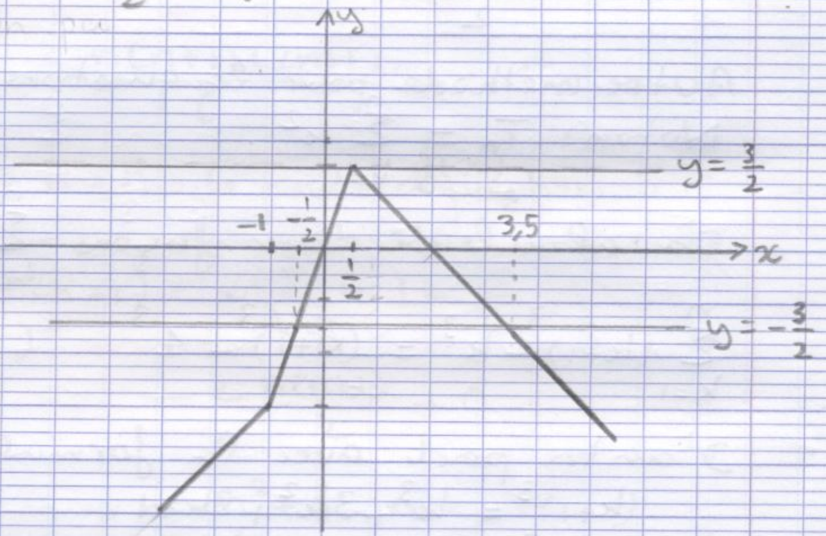
Si $x \leq \frac{1}{2}$: $2x-1 \leq 0$ donc $|2x-1| = -(2x-$

Il y a donc 3 cas :

Si $x \leq -1$: $f(x) = -(x+1) + (2x-1) = x-2$

Si $x \in [-1, \frac{1}{2}]$: $f(x) = (x+1) + (2x-1) = 3x$

Si $x \geqslant \frac{1}{2}$: $f(x) = (x+1) - (2x-1) = -x+2$



2) f n'est pas derivable en $x = -1$ ni en $x = \frac{1}{2}$

$|f(x)| \geqslant \frac{3}{2} \iff f(x) \geqslant \frac{3}{2}$ ou $f(x) \leq -\frac{3}{2}$

$f(x) \geqslant \frac{3}{2} \iff x = \frac{1}{2}$

$f(x) \leq -\frac{3}{2} \iff x \leq -\frac{1}{2}$ ou $x \geqslant 3,5$.

$S =]-\infty ; -\frac{1}{2}] \cup \{\frac{3}{2}\} \cup [3,5 ; +\infty[$.

$\boxed{\text{Ex } 8}$ 6)

Autre méthode pour la question 2 :

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$

$S_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$

$S_n = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$

$2S_n = (n+1) + (n+1) + \dots (n+1) + (n+1)$ (n fois)

$2S_n = n(n+1)$

$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Autre méthode pour la question 4 :

Notons $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

On calcule de deux façons $\sum_{k=1}^{n} ((k+1)^3 - k^3)$

$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3 = (n+1)^3 - 1^3$ (télescopage Ex 11)

D'autre part avec la formule du binôme

$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

$\sum_{k=1}^{n} ((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + 3k + 1$

$= 3T_n + 3S_n + n$

Donc $3T_n + 3S_n + n = (n+1)^3 - 1$

$$3T_n = (n+1)^3 - 3S_n - n - 1$$

$$= (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)\left[2(n+1)^2 - 3n - 2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)\left[2n^2 + 4n + \cancel{2} - 3n - \cancel{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n)$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)n(2n+1)$$

$$T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Autre méthode pour la question 5.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 2\frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$= n^2 + n - n$$

$$= n^2.$$

$\boxed{\text{Ex } 9}$ 5) Il faut montrer l'inégalité de l'exercice 8 question 1 : $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

On utilise la formule du binôme

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k$$

$$= \binom{n}{0}a^0 + \binom{n}{1}a^1 + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}a^k$$

$$= 1 + na + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}a^k \geqslant 1+na.$$

Corrigé de l'exercice 4 du cours sur les récurrences :

Soit P_n la proposition " $3^{2n+6} - 2^n$ est multiple de 7 "

Initialisation : $n = 0$

$3^6 - 2^0 = 728 = 7 \times 104$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : On se donne un entier n tel que P_n est vraie. On doit montrer qu'alors P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse, $3^{2n+6} - 2^n$ est multiple de 7 donc s'écrit $3^{2n+6} - 2^n = 7k$

$$\begin{aligned}
3^{2(n+1)+6} - 2^{n+1} &= 3^{2n+2+6} - 2^{n+1} \\
&= 3^{2n+6} \times 3^2 - 2^n \times 2 \\
&= 3^{2n+6} \times (7+2) - 2^n \times 2 \\
&= 3^{2n+6} \times 7 + (3^{2n+6} - 2^n) \times 2 \\
&= 3^{2n+6} \times 7 + 7k \times 2 \\
&= 7(3^{2n+6} + 2k)
\end{aligned}$$

c'est bien multiple de 7 donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : La propriété P_n est vraie au rang $n=0$ et est héréditaire donc est vraie pour tout $n \geq 0$.