

# Chemins confinés dans un quadrant

par Kilian Rasche<sup>1</sup>

Thèse réalisée sous la direction d'Irina Kurkova<sup>2</sup>

Cette note a pour but de résumer ma thèse "Chemins confinés dans un quadrant", réalisée entre 2007 et 2010 à l'Université Paris 6, sous la direction d'Irina Kurkova. Nous verrons d'abord que les motivations à l'étude des marches dans un quart de plan sont nombreuses et issues de domaines particulièrement variés (Section 1). Nous présenterons ensuite les grandes lignes d'une approche analytique permettant de traiter de nombreux problèmes liés aux chemins dans un quadrant (Section 2). Nous illustrerons enfin cette approche par un exemple originaire de la combinatoire énumérative (Section 3).

CHEMINS CONFINÉS DANS UN QUADRANT

## 1 Des motivations très variées

L'intérêt de la communauté mathématique envers les marches dans un quadrant (et plus généralement envers les marches dans des cônes) est dû, pour l'essentiel, aux multiples liens qu'elles entretiennent avec diverses branches des mathématiques. Elles sont en effet autant reliées à la théorie des représentations qu'à l'analyse harmonique, ou encore qu'aux matrices aléatoires. Très récemment, elles ont trouvé aussi des applications en finance [4] et en biologie des populations [11]. Un autre aspect nouveau est l'expertise puissante que l'informatique peut apporter pour traiter certains problèmes de marches dans un quart de plan (voir par exemple [1]). Dans cette première section (et plus globalement dans cette note), nous avons choisi de mettre l'accent sur trois autres domaines d'application des marches dans un quadrant, à savoir la combinatoire, les probabilités et l'analyse complexe.

### 1.1 Combinatoire

De nombreux objets combinatoires (cartes, permutations, arbres, tableaux de Young, etc.) sont codés par des marches sur des réseaux, en particulier par des marches sur un quart de plan, de sorte qu'en comprenant ces dernières, on comprendra mieux les objets. C'est pour cela que l'étude systématique des marches dans un quart de plan (sous l'angle de la combinatoire énumérative) a été entreprise dans [2]. Ce sont des contributions de la thèse [13] dans ce domaine que nous avons choisi de mettre en avant dans cette note : elles se trouvent dans la Section 3.

<sup>1</sup>CNRS & Université de Tours & Fédération Denis Poisson

<sup>2</sup>Université Pierre et Marie Curie

## 1.2 Probabilités et files d’attente

Étudier des marches dans un quadrant sous le prisme des probabilités présente de nombreux attraits.

D’abord, elles forment un cas particulier de processus cruciaux en probabilités : les marches aléatoires dans des cônes. De ce point de vue elles en sont un modèle-jouet, permettant d’établir de nombreux théorèmes (par exemple, concernant la récurrence/transience), avant d’aborder le cas de dimensions et de cônes quelconques ; voir [3, 6].

Elles sont aussi populaires pour elles-mêmes, car elles sont liées à une multitude d’objets en probabilités, mais aussi dans d’autres domaines des mathématiques : elles apparaissent dans l’étude des marches aléatoires quantiques (où la théorie des représentations est très utile) ; encore dans l’analyse des marches aléatoires non collisionnantes (comme par exemple le sont les valeurs propres de certaines matrices aléatoires) ; enfin en analyse harmonique (où il s’agit de décrire leur frontière de Martin par exemple [10]).

Une autre raison expliquant le succès des marches dans un quart de plan provient de la remarque très simple suivante : le quart de plan est l’espace naturel pour paramétrer toute population à deux dimensions. En conséquence, on peut alors s’intéresser, en biologie des populations, aux probabilités d’extinction ou de survie de toute population composée de deux types. C’est ce qui est fait dans [11]. Ce sont ces mêmes observations qui sont à l’origine de l’omniprésence des marches dans un quart de plan dans la théorie des files d’attente, que ce soit grâce à l’école hollandaise [3] ou à l’école française [5]. À ce propos, notons que le deuxième modèle présenté sur la Figure 2 correspond à la célèbre file d’attente dite en tandem. En finance enfin, depuis plus récemment, des modèles (comme le carnet d’ordres markovien) mettent en jeu des marches aléatoires dans un quart de plan [4].

## 1.3 Analyse complexe

Dès les années 1970 et les travaux de Fayolle et Iasnogorodski [5], Malyshev [12], Boxma et Cohen [3], des méthodes d’analyse complexe furent utilisées pour traiter des problèmes (alors probabilistes) liés à des marches dans des quarts de plan. Ces approches utilisent de nombreux aspects de l’analyse complexe : les problèmes frontière de Riemann-Hilbert, les surfaces de Riemann (tout particulièrement les fonctions elliptiques de Weierstrass), les représentations conformes, etc.

Cette approche analytique est doublement exigeante : d’abord car comme nous venons de voir, elle présente des technicités intrinsèques, mais aussi car les questions auxquelles nous souhaitons qu’elle puisse répondre ont un spectre très large. On aimerait en effet tant expliciter certaines quantités (par exemple des probabilités stationnaires) qu’obtenir des informations plus qualitatives (d’ordre asymptotique par exemple). Ce sont des aspects de l’approche analytique que nous nous proposons d’analyser à présent.

## 2 Une approche analytique sur mesure

L’approche pionnière pour résoudre des problèmes liés aux marches dans un quadrant via l’utilisation d’une équation fonctionnelle et de l’analyse complexe a été proposée par Malyshev [12] dans les années 1970, alors afin d’étudier les probabilités stationnaires pour des marches aléatoires ergodiques, homogènes à l’intérieur du quadrant et réfléchies sur le bord. Dans [12], Malyshev obtint leur fonction génératrice en termes de séries et de produits infinis, définis sur le recouvrement universel d’une certaine surface de Riemann naturellement associée à la marche aléatoire. Pour des questions semblables et peu de temps après, Fayolle et Iasnogorodski ont présenté dans [5] une approche plus intrinsèque au plan complexe, utilisant notamment les problèmes frontière. Plus récemment, le livre [6] des trois auteurs précédemment mentionnés a résumé et proposé de nouvelles voies pour le calcul de ces fonctions génératrices.

Avant de décrire cette approche, intéressons-nous à son analogue élémentaire de dimension un, à travers l’exemple de la ruine du joueur. À toute fin utile, rappelons que la ruine du joueur est un processus aléatoire un-dimensionnel, où un joueur disposant d’une fortune finie joue à pile ou face (équitablement ou non) contre un adversaire à fortune infinie (le casino par exemple). Notons  $X(n)$  la fortune du premier joueur après  $n$  lancers. Le processus  $(X(n))_{n \geq 0}$  est une marche aléatoire sur  $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  aux plus proches voisins (à chaque unité de temps, le joueur gagne ou perd une unité de fortune), avec probabilité  $p_1$  de gagner et  $p_{-1}$  de perdre, partant d’un état initial  $i_0$  (la fortune initiale), et tuée en 0 (le joueur ne remise plus après sa ruine); voir Figure 1.

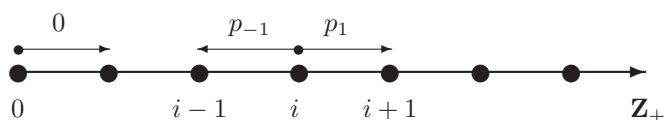


FIG. 1: Probabilités de transition dans la ruine du joueur

La quantité présentant le plus grand intérêt<sup>3</sup> est la probabilité de ruine

$$q_{i_0} = \mathbf{P}_{i_0}[\inf\{n \geq 1 : X(n) = 0\} < \infty].$$

Les fonctions de Green  $\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}_{i_0}[X(n) = i]$  sont également des quantités pertinentes (combien de fois, durant le jeu, le joueur aura-t-il la fortune  $i$ ?), et nous noterons

$$Q_{i_0}(x) = \sum_{i \geq 1} \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}_{i_0}[X(n) = i] x^{i-1}$$

leur série génératrice. Un argument classique (voir [7, Chapitre XIV]) pour trouver ces quantités peut être résumé comme suit :

<sup>3</sup>À la fois pour nous et pour le joueur.

Chemins confinés dans un quadrant

Étape 1 : trouver une équation fonctionnelle reliant les différentes quantités d'intérêt. Dans notre cas, on a :

$$x[p_1x + p_{-1}x^{-1} - 1]Q_{i_0}(x) = q_{i_0} - x^{i_0}. \tag{1}$$

En effet, on déduit facilement du modèle que pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\mathbf{P}[X(n+1) = i] = \begin{cases} \mathbf{P}[X(n) = i-1]p_1 + \mathbf{P}[X(n) = i+1]p_{-1} & \text{si } i \geq 2, \\ \mathbf{P}[X(n) = 2]p_{-1} & \text{si } i = 1, \\ \mathbf{P}[X(n) = 0] + \mathbf{P}[X(n) = 1]p_{-1} & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Multiplier ces équations par  $x^i$  et les sommer relativement à  $i \geq 1$  et  $n \geq 0$  fournit alors (1).

Étape 2 : évaluer l'équation fonctionnelle en une valeur de  $x$  bien choisie, puis trouver l'inconnue présente dans le membre de droite de l'équation. Dans notre cas, les deux solutions de  $p_1x + p_{-1}x^{-1} - 1 = 0$  sont positives, et nous notons  $\tilde{x}$  la plus petite. Évaluons (1) en  $\tilde{x}$ ; le membre de gauche devient nul, et on trouve  $q_{i_0} = \tilde{x}^{i_0}$ .

Étape 3 : revenir à l'équation, et obtenir une expression pour l'inconnue présente dans le membre de gauche de l'équation. Ici, si on utilise (1) avec la valeur de  $q_{i_0}$  trouvée à la seconde étape, on obtient tout de suite une expression pour  $Q_{i_0}(x)$ , à savoir  $Q_{i_0}(x) = (\tilde{x}^{i_0} - x^{i_0}) / (x[p_1x + p_{-1}x^{-1} - 1])$ .

**Remarque.** Après ces trois étapes, nous avons trouvé une expression pour toutes les quantités d'intérêt. Cette approche s'avère en pratique plus puissante. On peut en effet également trouver la nature algébrique de la fonction  $Q_{i_0}(x)$  : il s'agit d'une fonction rationnelle; on peut aussi trouver l'asymptotique de ses coefficients, en utilisant son comportement au voisinage de sa singularité dominante  $\tilde{x}$  et de l'analyse des singularités, dans l'esprit de [8].

Revenons maintenant au cœur du sujet, le quart de plan, et décrivons comment cette approche en trois étapes s'exporte à la dimension 2.

Étape 1. Typiquement [1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 12, 13], pour les marches dans un quart de plan, l'équation fonctionnelle prend la forme

$$K(x, y)Q(x, y) = a(x, y)q(x) + b(x, y)\tilde{q}(y) + c(x, y)q_0 + d(x, y), \tag{2}$$

où  $K, a, b, c, d$  sont des fonctions connues (caractéristiques du modèle), et  $Q, q, \tilde{q}, q_0$  des fonctions inconnues (par exemple, les séries génératrices de probabilités stationnaires). Dans un sens, cette première étape est toujours simple, car l'existence d'une équation fonctionnelle est intrinsèque au problème, et le cas échéant, elle peut aisément être obtenue.

Étape 2. Pour la dimension 2, l'analogue stricte de la deuxième étape serait d'évaluer l'équation fonctionnelle (2) en un point  $(x, y)$  bien choisi parmi tous ceux vérifiant  $K(x, y) = 0$ . Ce faisant, on aurait bien une équation entre les inconnues

$q, \tilde{q}, q_0$  du membre de droite, mais qui serait loin d’être suffisante pour en déduire leur expression<sup>4</sup>. De fait, l’inventivité de Fayolle, Iasnogorodski et Malyshev dans [5, 6, 12] a consisté à trouver une alternative pour cette seconde étape. De façon résumée, leur idée fut la suivante : on évalue l’équation (2) en une infinité de couples  $(x, y)$  tels que  $K(x, y) = 0$ . On obtient ainsi une infinité d’équations reliant les fonctions inconnues  $q, \tilde{q}, q_0$ . En reformulant ces dernières, on peut prouver que  $q, \tilde{q}$  satisfont certains problèmes frontière, ce qui finalement fournit des expressions pour ces fonctions. Quant à  $q_0$ , on la trouve le plus souvent par un argument de normalisation. On réfère à [5, 6, 12, 13] pour plus de détails.

*Étape 3.* Comme pour la dimension 1, la troisième étape est très simple : il suffit d’utiliser l’équation fonctionnelle (2).

Dans la section suivante, nous décrivons les conséquences possibles de cette approche en prenant un exemple issu de la combinatoire énumérative, et correspondant à [13, Chapitres A et B].

### 3 Exemple d’application en combinatoire

Sur le réseau  $\mathbb{Z}_+^2$ , chaque point possède huit voisins (nous incluons les voisins diagonaux). On peut alors choisir un sous-ensemble  $S$  de ces huit voisins, et le considérer comme les pas admissibles d’une marche sur le réseau. On obtient alors  $2^8 = 256$  modèles de marches dans  $\mathbb{Z}_+^2$  (voir la Figure 2 pour des exemples). Il est important de noter que sur les deux demi-axes formant le bord du quart de plan, on ne conserve que les sauts qui font rester la marche dans le quart de plan. Bousquet-Mélou et Mishna [2] ont montré qu’après l’élimination des cas triviaux et des cas équivalents à des modèles de marches dans le demi-plan (déjà traités), il reste 79 modèles inhéremment différents, dont quatre exemples historiquement importants sont représentés sur la Figure 2.

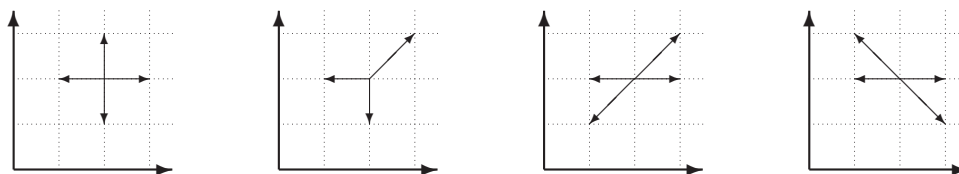


FIG. 2: De gauche à droite : les marches dites simple, de Kreweras, de Gessel et de Gouyou-Beauchamps

<sup>4</sup>C’était suffisant de procéder ainsi en dimension 1, car il y avait seulement une inconnue dans le membre de droite de l’équation, inconnue qui de plus n’était pas une fonction mais un réel.

Les questions d’intérêt concernent alors

$$q_S(i, j; n) = |\{\text{trajectoires construites avec } n \text{ sauts de } \mathbf{S}, \\ \text{partant de } (0, 0), \text{ arrivant en } (i, j), \text{ et restant dans } \mathbf{Z}_+^2\}|.$$

Elles sont les suivantes :

1. Que vaut  $q_S(i, j; n)$  ?<sup>5</sup>
2. Quel est le comportement asymptotique du nombre de marches se terminant en un point donné, ou dans une région fixée (un axe par exemple), lorsque leur longueur tend vers l’infini ?
3. Quelle est la nature de la série génératrice du nombre de marches : est-elle par exemple algébrique, ou même rationnelle ?<sup>6</sup>

Ces questions (de nature à la fois qualitative et quantitative) illustrent tant la variété des questions que celle des réponses que l’approche analytique présentée dans la Section 2 peut apporter. Contentons-nous dans cette note de proposer nos réponses à la question 1.

Dans [2], Bousquet-Mélou et Mishna avaient résolu le problème 1 dans 22 des 79 cas, et l’article [1] traitait un modèle (l’intrigante marche de Gessel, voir Figure 2 et les articles [1, 2] pour plus de détails). Les méthodes utilisées dans ces articles sont la méthode du noyau pour [2], et des méthodes de guessing-proving (preuves utilisant l’ordinateur) pour [1]. Dans [13, Chapitres A et B], nous donnons une réponse unifiée (i.e., pour tous les 79 modèles à petits sauts dans un quadrant) au problème 1. Pour 56 modèles, cette réponse fut donnée pour la toute première fois.

Plus précisément, dans [13, Chapitres A et B], nous explicitons  $q_S(i, j; n)$ , en trouvant leur série génératrice

$$\sum_{i, j, n \geq 0} q_S(i, j; n) x^i y^j t^n.$$

La formule que nous avons obtenue s’écrit comme une somme d’intégrales sur des segments du type

$$\int f(u; t) \frac{\partial_u w(u; t)}{w(u; t) - w(x; t)} \mathrm{d}u, \quad (3)$$

<sup>5</sup>Il serait bien sûr possible de compter ces nombres de trajectoires, mais le coût calculatoire serait énorme. Ici, nous nous posons la question de l’éventuelle existence d’une expression close pour ces nombres de marches, ou pour leur série génératrice.

<sup>6</sup>A priori, cette question peut paraître moins naturelle que les deux précédentes. En fait, elle est motivée par (au moins) deux éléments : d’abord, elle permet de classer les 79 modèles selon la nature de la série génératrice ; en outre, si la fonction s’avère algébrique, trouver l’asymptotique de ses coefficients est bien plus facile, voir [8].

où  $f$  est algébrique et où  $w$  est une certaine représentation conforme, avec des propriétés de recollement. Pour obtenir l’expression (3), nous avons dû développer l’approche analytique, en particulier l’adapter à une situation non probabiliste, l’adapter également à la présence d’une troisième variable  $t$ .

La différence de traitement entre les 79 modèles se trouve dans la fonction de recollement conforme  $w$  à l’intérieur des intégrales. Si l’existence de cette fonction est facile à montrer, son calcul explicite est généralement une tâche ardue. Nous avons explicité cette fonction de recollement conforme pour tous les modèles, et nous avons mis en exergue le lien entre sa nature algébrique, la finitude d’un certain groupe d’automorphismes naturellement associé à la marche, et le signe de la covariance  $\sum_{(i,j) \in \mathbf{S}} ij$  de  $\mathbf{S}$ . Cette fonction s’avère rationnelle si le groupe est fini et si la covariance est négative ou nulle, algébrique si le groupe est fini et si la covariance est positive, non algébrique si le groupe est infini. Dans ce dernier cas, nous démontrons que la fonction de recollement admet l’expression  $w(u; t) = \wp(g(\tilde{\wp}(u); t))$ , où  $g$  est affine et où  $\wp, \tilde{\wp}$  sont des fonctions elliptiques de Weierstrass associées à des réseaux différents, en outre dépendants de  $t$ .

## Références

- [1] A. Bostan, and M. Kauers. The complete generating function for Gessel walks is algebraic. *Proc. Amer. Math. Soc.* **432** (2010) 3063–3078.
- [2] M. Bousquet-Mélou, and M. Mishna. Walks with small steps in the quarter plane. *Contemp. Math.* **520** (2010) 1–40.
- [3] J.W. Cohen, and O.J. Boxma. *Boundary value problems in queueing system analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1983).
- [4] R. Cont, and A. de Larrard. Price dynamics in a Markovian limit order book market. *Preprint arXiv:1104.4596* (2011).
- [5] G. Fayolle, and R. Iasnogorodski. Two coupled processors: the reduction to a Riemann-Hilbert problem. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **47** (1979) 325–351.
- [6] G. Fayolle, R. Iasnogorodski, and V. Malyshev. *Random walks in the quarter plane*. Springer-Verlag, Berlin (1999).
- [7] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I*. John Wiley and Sons, Inc., New York (1957).
- [8] P. Flajolet, and R. Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge (2009).
- [9] I. Ignatiouk-Robert, and C. Loree. Martin boundary of a killed random walk on a quadrant. *Ann. Probab.* **38** (2010) 1106–1142.
- [10] I. Kurkova, and V. Malyshev. Martin boundary and elliptic curves. *Markov Process. Related Fields* **2** (1998) 203–272.

---

Chemins confinés dans un quadrant

- [11] P. Lafitte-Godillon, K. Raschel, and V.C. Tran. Extinction probabilities for a distylous plan population modeled by an inhomogeneous random walk on the positive quadrant. *Preprint* arXiv:1201.6461 (2012).
- [12] V. Malyshev. Positive random walks and Galois theory. *Uspehi Mat. Nauk* **26** (1971) 227–228.
- [13] K. Raschel. *Chemins confinés dans un quadrant*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 6. (2010).



*Mathématiques & Applications*

Collection de la SMAI éditée par Springer-Verlag

Directeurs de la collection : J. Garnier et V. Perrier

- Vol 59 M. Elkadi, B. Mourrain, *Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux*, 2007, 307 p., 59 €- tarif SMAI : 47,20 €
- Vol 60 N. Caspard, B. Monjardet, B. Leclerc, *Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages*, 2007, 340 p., 58 €- tarif SMAI : 46,60 €
- Vol 61 H. Pham, *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance*, 2007, 188 p., 35 €- tarif SMAI : 28 €
- Vol 62 H. Ammari, *An Introduction to Mathematics of Emerging Biomedical Imaging*, 2008, 205 p., 46 €- tarif SMAI : 36,80 €
- Vol 63 C. Gaetan, X. Guyon, *Modélisation et statistique spatiales*, 2008, 330 p., 64 €- tarif SMAI : 51.20 €
- Vol 64 J.-M. Rakotoson, *Réarrangement relatif*, 2008, 320 p., 64 €- tarif SMAI : 51.20 €
- Vol 65 M. Choulli, *Elementary Feedback Stabilization of the Linear Reaction-convection-diffusion Equation and the Wave Equation*, 2010, 300 p., 64 €- tarif SMAI : 51.20 €
- Vol 66 W. Liu, *Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques*, 2009, 270 p., 95 €- tarif SMAI : 76 €
- Vol 67 W. Tinsson, *Plans d'expérience : constructions et analyses statistiques*, 2010, 530 p., 100 €- tarif SMAI : 80 €
- Vol 68 B. Desprès, *Lois de conservation Eulériennes, Lagrangiennes et méthodes numériques*, 2010, 530 p., 55 €- tarif SMAI : 44 €
- Vol 69 D.A. Di Pietro, A. Ern, *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods*, 2012, 384 p., 89,95 €- tarif SMAI : 71,95 €

*Le tarif SMAI (20% de réduction) et la souscription (30% sur le prix public) sont réservés aux membres de la SMAI.*

Pour obtenir l'un de ces volumes, adressez votre commande à :

Springer-Verlag, Customer Service Books -Haberstr. 7, D 69126 Heidelberg/Allemagne

Tél. 0 800 777 46 437 (No vert) - Fax 00 49 6221 345 229 - e-mail : orders@springer.de

Paiement à la commande par chèque à l'ordre de Springer-Verlag ou par carte de crédit (préciser le type de carte, le numéro et la date d'expiration).

Prix TTC en France (5,5% TVA incl.). Au prix des livres doit être ajoutée une participation forfaitaire aux frais de port : 5 euros (+ 1,50 euros par ouvrage supplémentaire).

---

## Thèses en ligne!

Le service TEL (<http://tel.archives-ouvertes.fr/>) est dédié à l’archivage des thèses et des Habilitations à Diriger les Recherches. Il est modelé sur le serveur de prépublications HAL. Ces services ont été créés par le CCSD (Centre pour la Communication Scientifique Directe). TEL est géré en collaboration avec Mathdoc et la Société Française de Physique.

Le dépôt des thèses est libre, la vérification concerne seulement la pertinence du classement thématique et la correction des données administratives, comme pour HAL.

Tout nouveau docteur (ou habilité) peut ainsi rendre visible (en 24 heures environ) son document de soutenance, ce qui ne peut qu’être encouragé!

Thierry Dumont.