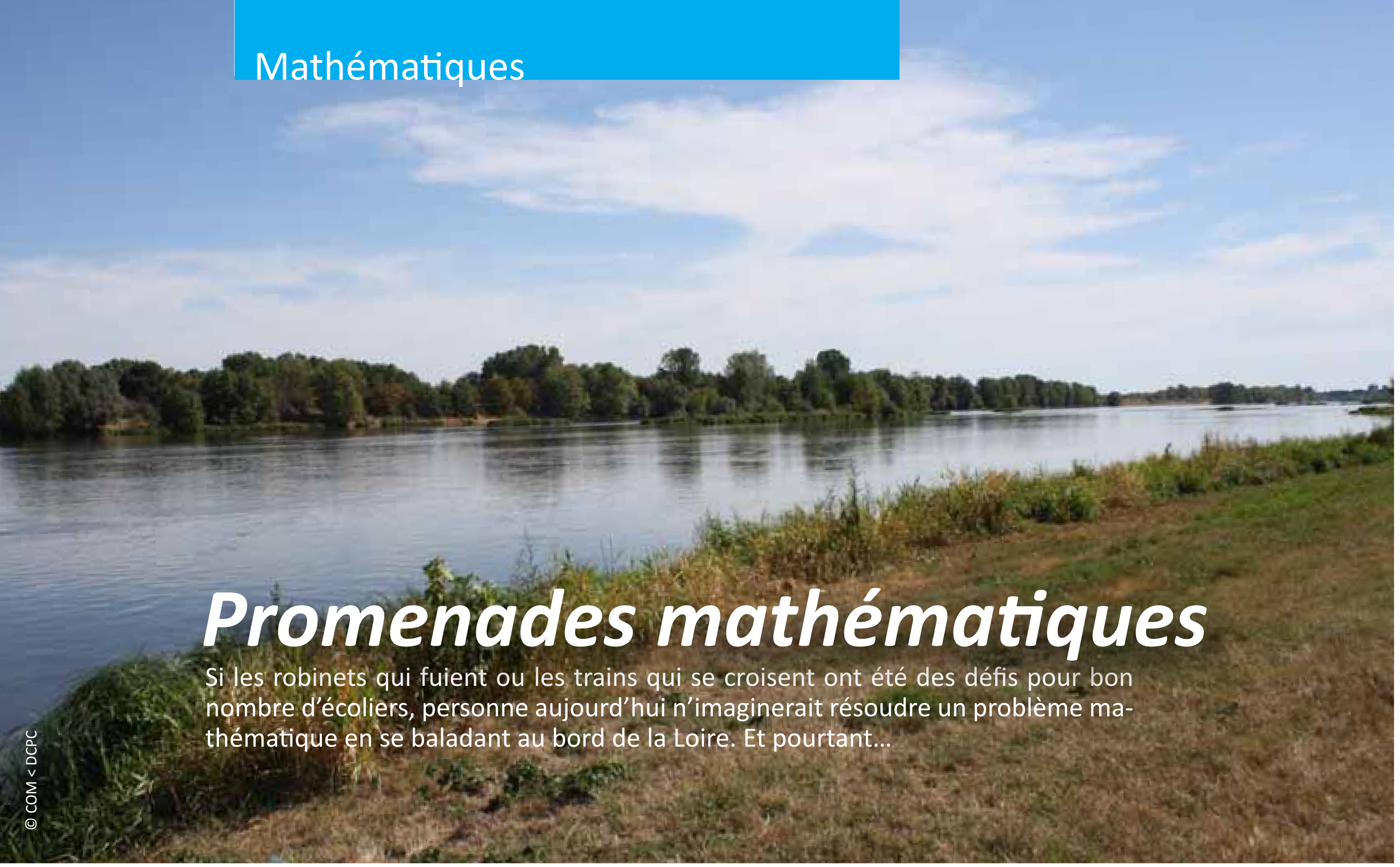

© COM < DCPC

Promenades mathématiques

Si les robinets qui fuient ou les trains qui se croisent ont été des défis pour bon nombre d'écoliers, personne aujourd'hui n'imaginerait résoudre un problème mathématique en se baladant au bord de la Loire. Et pourtant…

Retour au point de départ

Imaginons un promeneur marchant le long des quais de la Loire, de platane en platane, et oubliant à chaque arbre la direction d'où il vient ; il peut donc une fois sur deux revenir en arrière (on note le pas « -1 ») ou continuer dans la même direction (pas « +1 »). Quelle est alors la probabilité que le **n**-énième platane que notre flâneur rencontre soit exactement celui dont il est parti ?

Retrouvons à présent notre marcheur dans les rues de Manhattan, errant de carrefour en carrefour, et repartant chaque fois au hasard dans une des 4 directions qui s'offrent à lui : Est, Ouest, Nord et Sud. Que vaut cette fois la probabilité qu'au **n**-énième carrefour notre promeneur se retrouve à son point de départ ?

Imaginons enfin notre promeneur dans un décor futuriste, déambulant sur une structure arborescente et découvrant à chaque embranchement 3 nouveaux chemins jamais explorés jusqu'alors ; il peut choisir un de ces 3 chemins ou bien revenir en arrière, avec une probabilité de 0.25 pour chacun de ces 4 choix. Quelle est dans ce cas la probabilité qu'il revienne à son point de départ au bout de **n** carrefours ?

« la structure sur laquelle évolue le promeneur est d'une grande importance.»

Dans les trois situations ci-dessus, la probabilité de retour au point de départ devient de plus en plus petite lorsque le nombre **n** de pas grandit :

- **sur le bord de Loire**, au bout de 100 pas, cette probabilité est de l'ordre de 0.1, au bout de 10 000 pas elle devient de l'ordre de 0.01 ; on montre en effet qu'elle tend vers 0 en $1/\sqrt{n}$.
- **dans Manhattan,** la probabilité tend plus vite vers 0, puisque le nombre de choix possibles à chaque étape est plus important : au bout de 100 pas, cette probabilité est de l'ordre de 0.01, au bout de 10 000 pas elle devient de l'ordre de 0.000 1 ; elle tend cette fois-ci vers 0 en $1/n$.
- **dans le décor de science-fiction** enfin, le promeneur s'éloigne de l'origine chaque fois qu'il choisit un des nouveaux chemins qui s'offrent à lui, ceci arrive donc avec une probabilité 0.75 ; la probabilité de revenir à l'origine est donc beaucoup plus faible, elle tend vers 0 comme la suite $(0.866)n/\sqrt{n}$: au bout de 100 pas, elle est de l'ordre de 0.000 000 06, au bout de 10 000 pas, elle devient presque nulle…

Depuis maintenant plus de 50 ans, ces différentes situations sont étudiées en profondeur par les mathématiciens ; la structure sur laquelle évolue le promeneur est d'une grande importance.

- **sur le bord de Loire**, tout se passe comme sur l'ensemble des entiers relatifs (positifs ou négatifs). On peut ainsi revenir en 0 au bout de 4 étapes en faisant par exemple les successions de pas 1, 1, -1, -1, ou encore 1, -1, 1, -1 ; au lecteur de vérifier qu'il y a 6 « trajectoires » distinctes possibles.
- **dans Manhattan**, on se déplace sur le plan Z2 avec les pas cardinaux E, O, N et S ; on peut ainsi revenir en (0,0) au bout de 4 étapes en faisant les pas N, S, N, S ; ou encore N, N, S, S ; et même N, S, E, O. On trouve en tout 36 trajectoires possibles !
- **dans le décor de science-fiction**, le nombre de chemins de longueur **n** qui reviennent au point de départ croît de façon gigantesque, du fait de la structure arborescente beaucoup plus touffue.

Entre algèbre et probabilités

« Les mathématiciens sont comme les Français : quoique vous leur disiez, ils le traduisent dans leur propre langage et cela signifie alors quelque chose de complètement différent. »

Cette célèbre phrase de Goethe se vérifie dans le cas des marches aléatoires. Les structures décrites ci-dessus peuvent en effet être munies d'une opération : l'addition classique des entiers dans le cas de la promenade au bord de Loire, celle (plus délicate) des vecteurs du plan dans Manhattan, et enfin la concaténation des mots pour le décor futuriste. On dit dans ces cas que la promenade aléatoire s'effectue sur un « groupe ».

Des liens très forts existent alors entre la théorie des groupes (qui relève du champ de l'algèbre) et celle des probabilités. Les applications sont multiples, notamment en physique et biologie, mais aussi de façon interne aux mathématiques par un curieux effet de flux et reflux entre thématiques a priori distinctes. Ainsi la notion précieuse de « moyennabilité » d'un groupe, intensément étudiée depuis une quarantaine d'année, trouve une traduction probabiliste lumineuse depuis les travaux du mathématicien américain H. Kesten : un groupe est moyennable si, et seulement si, la probabilité de retour en l'origine de toute marche aléatoire symétrique sur ce groupe ne décroit pas exponentiellement vite ! Ainsi, le bord de Loire et Manhattan sont moyennables, mais notre décor futuriste ne l'est pas !

© Thinkstock®

© Thinkstock®

Une marche confinée dans un cône

La structure algébrique qui sous-tend les univers arborescents décrits ci-dessus peut-être allégée ; c'est ce que font à Tours certains membres de l'équipe de Probabilités du Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique (LMPT – UMR 7350 CNRS/ Université François-Rabelais de Tours) en étudiant les marches aléatoires confinées dans des cônes.

Un rappel géographique s'impose tout d'abord : Manhattan est bordé à l'ouest par l'Hudson River et au sud par l'East River. En conséquence, certains carrefours (ceux se trouvant au bord de l'eau) ne présentent que 2 ou 3 directions possibles. Notre promeneur évolue donc en réalité dans un quart de plan.

En termes mathématiques, le promeneur de Manhattan effectue une marche confinée dans un quart de plan, exemple basique de « cône » ; les trajectoires qu'il est autorisé à suivre codent naturellement des objets connus en combinatoire, elles apparaissent aussi en biologie des populations, lors de l'étude de leur probabilité d'extinction, ou dans le domaine des télécommunications pour modéliser certains phénomènes reliés aux files d'attente à plusieurs serveurs.

L'étude des marches dans des cônes fait apparaître des difficultés mathématiques profondes, notamment parce que la structure sous-jacente n'est pas celle d'un groupe : l'addition existe bien dans les cônes mais ces ensembles ne sont malheureusement pas stables sous certaines symétries ce qui complique singulièrement leur étude. De nombreuses questions sont encore ouvertes, attisant en particulier l'intérêt des chercheurs en informatique dont l'expertise de puissants logiciels de calcul se révèle précieuse lorsque les mathématiques s'avèrent (pour l'instant...) impuissantes ! Ces questions relèvent aussi de thématiques distinctes en mathématiques ; pour les étudier, on utilise en effet des arguments issus de la « théorie du renouvellement », sous-domaine du calcul des probabilités, ou encore des « fonctions de Schur », outil algébrique essentiel en « théorie des représentations ».

Kilian RASCHEL < LMPT
kilian.raschel@lmpt.univ-tours.fr

Marc PEIGNÉ < LMPT
marc.peigne@lmpt.univ-tours.fr

http://www.lmpt.univ-tours.fr/