Promenades sur le quart de plan

Utilisant des outils issus des probabilités et de l'analyse complexe, des mathématiciens ont fait le lien entre le type de sauts et la nature des chemins sur un réseau confiné à un quart du plan.

© DR

Kilian Raschel, chargé de recherche au CNRS, est spécialiste de probabilités et de combinatoire ; il effectue sa recherche à l'université François-Rabelais de Tours. Sa thèse, soutenue en 2010, a reçu le prix Jacques-Neveu de la meilleure thèse en probabilités/statistiques.

sur le web

http://tinyurl.com/page-raschel
Page professionnelle de Kilian Raschel.

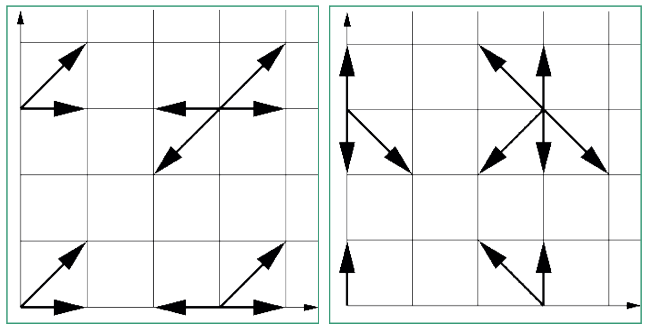
http://tinyurl.com/expo-bousquet1

http://tinyurl.com/expo-bousquet2

http://tinyurl.com/expo-bousquet3
Exposés de combinatoire énumérative par Mireille Bousquet-Mélou.

Vous étudiez des chemins sur un plan quadrillé. Qu'avez-vous montré à leur propos ?

K.R. On se place sur un plan quadrillé, l'analogue d'une feuille à petits carreaux, et on étudie les chemins qui vont d'un point à un autre du quadrillage en suivant certaines « règles ». La règle consiste par exemple à se déplacer d'une unité à la fois dans l'une des directions suivantes : est, ouest, nord-ouest, sud-ouest. Ces déplacements autorisés forment ce qu'on nomme un « espace de saut ». Et pour un espace de saut donné, on peut tracer une infinité de chemins. Combien de chemins passent tant de fois à tel endroit en un nombre donné d'étapes ? Combien partent de l'origine et y reviennent ? Telles sont les questions que l'on peut se poser. Plus généralement, comment caractériser tous les chemins possibles pour un espace de saut donné ? Le bon outil pour cette caractérisation est une fonction à plusieurs variables baptisée « fonction de comptage ». Ce que nous avons fait, c'est caractériser la fonction de comptage associée à tous les « petits » espaces de saut possibles (voir la figure) et en se restreignant au quart de plan. Autrement dit, notre travail a permis de relier de manière explicite l'espace de saut à la nature de chaque fonction de comptage.



Un espace de saut consiste en des déplacements possibles. L'espace de saut de Gessel (à gauche, sauts autorisés : E-O-NE-SO) correspond à un groupe fini. Un autre espace de saut représenté ici (à droite, sauts autorisés N-SE-S-SO-NE) correspond à un groupe infini. En tout, il y a 79 espaces de saut non triviaux différents. © DR

Pourquoi travailler dans le quart de plan ?

K.R. Cette restriction aux chemins qui sont confinés dans un quart de plan peut sembler artificielle. En fait, elle intéresse énormément de monde en raison de ses applications. Ces chemins codent naturellement des objets connus en combinatoire, tels certains arbres ou certains tableaux, de sorte qu'en comprenant mieux ces chemins, on comprendra mieux ces objets. Par ailleurs, les études de ces chemins ont également des applications en biologie des populations lorsqu'on cherche à calculer des probabilités d'extinction ou de survie d'une population. Enfin, une grosse partie de la théorie des files d'attente à 2 dimensions, primordiale pour ses applications dans le domaine des télécommunications, est directement modélisée par des chemins dans un quart de plan.

Comment vous y êtes-vous pris ?

K.R. Nous avons développé des méthodes élaborées à partir des années 1970, notamment par Vadim Malyshev, qui avait été le patron de ma directrice de thèse, Irina Kourkova, à l'université de Moscou. Nous avons pu montrer que des groupes (objets élémentaires de l'algèbre) associés à l'espace des sauts permettaient de caractériser la fonction de comptage, de connaître sa nature, notamment de savoir si cette fonction est holonome ou non, une notion fondamentale en combinatoire (lire « La nature des fonctions », ci-dessus). Autrement dit, c'est le groupe qui va gouverner la nature des chemins. Si le groupe associé à la fonction est fini, alors la fonction est holonome, et, si le groupe est infini, la fonction est non holonome [1]. Au final, sur les 79 espaces de saut possibles, 23 ont des groupes finis, et 56 ont des groupes infinis.

Peut-on étendre ce résultat ?

K.R. Pas à d'autres dimensions, du moins avec ces méthodes : nos outils sont essentiellement issus de l'analyse complexe, qui est surtout efficace à 2 dimensions. En revanche, on peut se poser d'autres questions sur ces chemins, notamment sur leur comportement asymptotique : que se passe-t-il lorsque la longueur d'un chemin tend vers l'infini ? Il reste beaucoup de conjectures sur ce type de question. De la même façon, on peut tenter de généraliser ces résultats à des espaces de saut différents, où on ne se contente pas de sauts vers les plus proches voisins par exemple. ■ **Propos recueillis par Philippe Pajot**

[1] I. Kurkova et K. Raschel, arxiv.org/abs/1107.2340

LA NATURE DES FONCTIONS

La nature des fonctions permet de les classifier. Les fonctions rationnelles sont des quotients de deux polynômes. Les fonctions algébriques, qui englobent les fonctions rationnelles, regroupent les fonctions qui satisfont une équation polynomiale, dont les coefficients sont eux-mêmes polynomiaux. Enfin, les fonctions holonomes sont une extension des fonctions algébriques : ce sont les fonctions qui vérifient une équation différentielle. Par exemple, la fonction $f(x) = \sin x$ n'est pas une fonction algébrique à coefficients polynomiaux car elle n'est solution d'aucune équation polynomiale. Mais elle est holonome, car solution de l'équation différentielle $f''(x) + f(x) = 0$. Les fonctions holonomes sont utiles, notamment en raison de leurs propriétés de fermeture : elles sont stables par produit, somme, dérivation, intégration et substitution par une fonction algébrique. Beaucoup de fonctions classiques sont holonomes.

Chronologie

Fin du XIXe siècle : Désiré André met au point une méthode de comptage de chemins sur une demi-droite qui s'adapte au quart de plan.
1967 : Ron Mullin établit une correspondance entre les comptages de chemins sur un quart de plan et celui des arbres sur des cartes.
1970-1972 : Vadim Malyshev introduit un groupe qui laisse invariante la fonction qui décrit les pas que le chemin a le droit de prendre sur un plan.
1979 : Guy Fayolle et Roudolf Iasnogorodski élaborent des outils analytiques pour l'étude probabiliste des chemins dans le quart de plan.
2000 : Ira Gessel conjecture une formule pour le nombre de chemins finissant à l'origine pour l'espace de saut de Gessel.
2007 : Mireille Bousquet-Mélou et Marni Mishna établissent qu'il y a 79 espaces de saut différents et traitent le cas de 22 d'entre eux, couvrant tous les cas où le groupe est fini (sauf l'espace de saut de Gessel).
2008-2010 : Manuel Kauers et Alin Bostan prouvent la conjecture de Gessel et montrent que la fonction de comptage associée est algébrique.
2011 : Irina Kurkova et Kilian Raschel traitent les 56 cas restants qui correspondent à des groupes infinis.