

**PROCESSUS ALÉATOIRES DANS DES CÔNES — 16 mai 2014**  
NOTES DE COURS (CMAP, ÉCOLE POLYTECHNIQUE)

KILIAN RASCHEL

RÉSUMÉ. Dans cette série de trois exposés, je m'intéresserai à différents aspects des processus aléatoires dans des cônes, qu'ils soient discrets ou continus. Nous regarderons tout particulièrement les exemples des marches aléatoires et du mouvement Brownien. Je donnerai quelques applications simples en biologie des populations.

*06 mai : Séance 1/3 "Sur le temps de sortie de cônes des marches aléatoires avec drift"*

Dans cet exposé, on s'intéresse au taux exponentiel de décroissance de la probabilité qu'une marche aléatoire avec dérive reste dans un cône fixé jusqu'à l'instant  $n$ . Pour une marche aléatoire possédant tous les moments exponentiels, et dont le support satisfait une condition simple de non-dégénérescence vis-à-vis du cône considéré, nous démontrons que le taux exponentiel est donné par le minimum de la transformée de Laplace sur le cône dual. Ce résultat résout en particulier le problème du calcul du taux de croissance du nombre de chemins (de longueur  $n$ ) confinés dans un orthant. Il s'agit d'un travail en collaboration avec R. Garbit (Université d'Angers).

*14 mai : Séance 2/3 "Marches aléatoires dans des cônes : méthodes analytiques et applications en biologie des populations"*

Dans cet exposé je présenterai une méthode analytique permettant de résoudre des problèmes liés aux marches aléatoires dans un quart de plan. Cette méthode fut initiée dans les années 70 par les écoles russes et françaises, et connaît actuellement un grand développement, dû notamment à ses applications dans de nombreux domaines des mathématiques. J'illustrerai cette approche par deux exemples simples issus de la biologie des populations, l'un d'entre eux étant le sujet d'un travail commun avec P. Lafitte-Godillon (École Centrale Paris) et C. Tran (Université de Lille 1).

*20 mai : Séance 3/3 "Mouvement Brownien dans des cônes"*

Dans cet exposé je m'intéresserai au mouvement Brownien dans des cônes. Je présenterai dans un premier temps quelques enjeux de son étude, ainsi que des résultats anciens. Nous évoquerons aussi des problèmes ouverts, concernant notamment le temps d'occupation. Nous verrons aussi que l'étude du mouvement Brownien dans des cônes a des conséquences importantes sur les marches aléatoires dans des cônes (comme l'ont récemment prouvé D. Denisov et V. Wachtel).

**Première partie 1. Sur le temps de sortie de cônes des marches aléatoires avec drift (Séance 1/3)**

*Cette partie contient un résumé détaillé (en anglais) de l'article "On the exit time from a cone for random walks with drift" [8], qui est le sujet de la première des trois séances du mini-cours.*

In this article we consider  $d$ -dimensional random walks such that the law of the increments has all exponential moments. For a large class of cones, we compute the exponential decay of the probability for such random walks to stay in the cone up to time  $n$ , as  $n$  goes to infinity. We show that the latter equals the global minimum, on the dual cone, of the Laplace transform of the random walk increments.

Our results find applications in the counting of walks in orthants, a classical domain in enumerative combinatorics. Given a finite set  $\mathfrak{S}$  of allowed steps, a now classical problem is to study  $\mathfrak{S}$ -walks in the orthant  $Q = \mathbf{Z}_+^d$  ( $d \geq 2$ ), that is walks confined to  $Q$ , starting at a fixed point  $x$  (often the origin) and using steps in  $\mathfrak{S}$  only. Denote by  $f_{\mathfrak{S}}(x, y; n)$  the number of such walks that end at  $y$  and use exactly  $n$  steps. Many properties of the counting numbers  $f_{\mathfrak{S}}(x, y; n)$  have been recently analyzed (the seminal work in this area is [2]). First, exact properties of them were derived, via the study of their generating function (exact expression and algebraic nature). Such properties are now well established for the case of small steps walks in the quarter plane, meaning that the step set  $\mathfrak{S}$  is included in  $\{0, \pm 1\}^2$ . More qualitative properties of the  $f_{\mathfrak{S}}(x, y; n)$  were also investigated, such as the asymptotic behavior, as  $n \rightarrow \infty$ , of the number of excursions  $f_{\mathfrak{S}}(x, y; n)$  for fixed  $y$ , or that of the total number of walks,

$$(1) \quad f_{\mathfrak{S}}(x; n) = \sum_{y \in Q} f_{\mathfrak{S}}(x, y; n).$$

Concerning the excursions, several small steps cases have been treated by Bousquet-Mélou and Mishna [2] and by Fayolle and Raschel [6]. Later on, Denisov and Wachtel [4] obtained the very precise asymptotics of the excursions, for a quite large class of step sets and cones. As for the total number of walks (1), only very particular cases are solved, see again [2, 6]. In a most recent work [10], Johnson, Mishna and Yeats obtained an upper bound for the exponential growth constant, namely,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_{\mathfrak{S}}(x; n)^{1/n},$$

and proved by comparison with results of [6] that these bounds are tight for all small steps models in the quarter plane. In the article [8], we find the exponential growth constant of the total number of walks (1) in any dimension for any model such that:

- (i) The step set  $\mathfrak{S}$  is not included in a linear hyperplane;
- (ii)  $\mathfrak{S}$  is not included in a half-space  $u^- = \{v \in \mathbf{R}^d : \langle v, u \rangle \leq 0\}$ , with  $u \in Q \setminus \{0\}$ ;
- (iii) The step set allows a path staying in  $Q$  from the origin to some point in the interior of  $Q$ .

In the sequel we shall say that a step set  $\mathfrak{S}$  is proper if it satisfies the properties (i), (ii) and (iii). Note in particular that the well-known 79 models of walks in the quarter plane studied in [2, 6] (including the so-called 5 singular walks) satisfy the hypotheses above.

Our theorem in combinatorics can be stated as follows. Let  $\mathfrak{S}$  be any proper step set. The Laplace transform of  $\mathfrak{S}$ ,

$$L_{\mathfrak{S}}(x) = \sum_{s \in \mathfrak{S}} e^{\langle x, s \rangle},$$

reaches a global minimum on  $Q$  at a unique point  $x_0$ , and for any starting point  $x$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\mathfrak{S}}(x; n)^{1/n} = L_{\mathfrak{S}}(x_0).$$

As a consequence, we obtain the following result, which was conjectured in [10]: Let  $\mathfrak{S} \subset \mathbf{Z}^d$  be a proper step set, and let  $K_{\mathfrak{S}}$  be the growth constant for the total number of walks (1). Let  $\mathcal{P}$  be the set of hyperplanes through the origin in  $\mathbf{R}^d$  which do not meet the interior of the first orthant. Given  $p \in \mathcal{P}$ , let  $K_{\mathfrak{S}}(p)$  be the growth constant of the walks on  $\mathfrak{S}$  which are restricted to the side of  $p$  which includes the first orthant. Then  $K_{\mathfrak{S}} = \min_{p \in \mathcal{P}} K_{\mathfrak{S}}(p)$ .

## Deuxième partie 2. Marches aléatoires dans des cônes : méthodes analytiques et illustrations en biologie des populations (Séance 2/3)

### 1. L'EXEMPLE DE LA DIMENSION 1

À titre d'exemple, considérons une population monotype dont l'évolution, très simple, est régie par la marche aléatoire sur  $\mathbf{Z}_+$  absorbée en 0 (cela correspond à son extinction), comme représentée sur la figure 1 ci-dessous. On s'intéresse à la probabilité d'extinction de cette population  $(S(\ell))_{\ell \geq 0}$ , définie par

$$q_i = \mathbf{P}_i[\tau < \infty], \quad \tau = \inf\{\ell \geq 0 : S(\ell) = 0\}.$$

Une application standard de la propriété de Markov donne que les  $q_i$  satisfont l'équation de récurrence

$$(2) \quad q_i = p_{-1}q_{i-1} + p_1q_{i+1}, \quad \forall i \geq 1,$$

avec la condition initiale

$$q_0 = 1.$$

On ne considère que le cas où  $p_{-1} < p_1$ , sinon des théorèmes limite classiques donnent que  $q_i = 1$ , pour tout  $i$ .

On pourrait bien sûr résoudre la récurrence (2) directement, mais on s'intéresse ici à une méthode généralisable à la dimension 2, utilisant les séries génératrices (cette méthode est utilisée notamment dans [7, Chapitre XIV, Sections 1–5]). On introduit donc la série

$$Q(x) = \sum_{i \geq 1} q_i x^{i-1}, \quad \forall |x| < 1,$$

qui sera particulièrement utile dans la suite. La méthode peut se résumer en trois étapes clés.

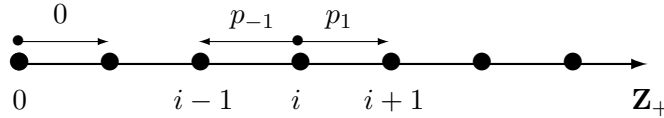


FIGURE 1. Probabilités de saut pour la marche aléatoire sur  $\mathbf{Z}_+$  absorbée en 0

*Étape 1 : Trouver une équation fonctionnelle.* Dans notre cas on établit facilement que

$$(3) \quad x(p_1x^{-1} + p_{-1}x - 1)Q(x) = q_1p_1 - p_{-1}x.$$

Pour obtenir cette équation, il suffit de multiplier la relation de récurrence (2) par  $x^i$ , de sommer sur  $i \geq 1$ , et enfin d'utiliser le fait que  $q_0 = 1$ .

Souvent, cette étape-là ne pose pas de problème, dans la mesure où s'il existe une équation fonctionnelle liée au problème, on pourra (a priori) la trouver sans difficulté majeure.

*Étape 2 : Évaluer l'équation fonctionnelle en une valeur bien choisie de  $x$  et en déduire l'inconnue  $q_1$  dans le membre de droite.* Dans notre cas les deux solutions de  $p_1x^{-1} + p_{-1}x - 1 = 0$  sont positives (il s'agit en effet de 1 et de  $p_1/p_{-1}$ ), et 1 est la plus petite.

Si on évalue (3) en 1 on trouve immédiatement que  $q_1 = p_{-1}/p_1 \in (0, 1)$ . (Le fait que l'on puisse effectivement évaluer en 1, c'est-à-dire que 1 appartienne bien au domaine de définition, peut se déduire de (3) et de considérations probabilistes simples sur le modèle.)

*Étape 3 : Revenir à l'équation fonctionnelle et obtenir une expression pour la fonction inconnue du membre de gauche.* C'est immédiat, puisque le membre de droite est désormais connu : l'équation (3) se réécrit

$$p_{-1}(x-1)(x-p_{-1}/p_1)Q(x) = p_{-1}(x-1),$$

donc  $Q(x)$  vaut

$$Q(x) = \frac{p_{-1}}{p_1} \frac{1}{1 - \frac{p_{-1}}{p_1}x} = \sum_{i \geq 1} \left( \frac{p_{-1}}{p_1} \right)^i x^{i-1},$$

ce qui est bien en accord avec la résolution directe de l'équation de récurrence.

## 2. PREMIERS PAS EN DIMENSION 2 : LA MARCHÉ ALÉATOIRE SIMPLE HOMOGENÈNE

On s'intéresse maintenant à une population **multitype** (de deux types), dont l'évolution est régie par une marche aléatoire simple sur  $\mathbf{Z}_+^2$  absorbée sur les axes (voir la figure 2). L'absorption sur les axes correspond à l'hypothèse suivante que l'on fait : pour qu'une reproduction existe, les deux types d'individus doivent coexister.

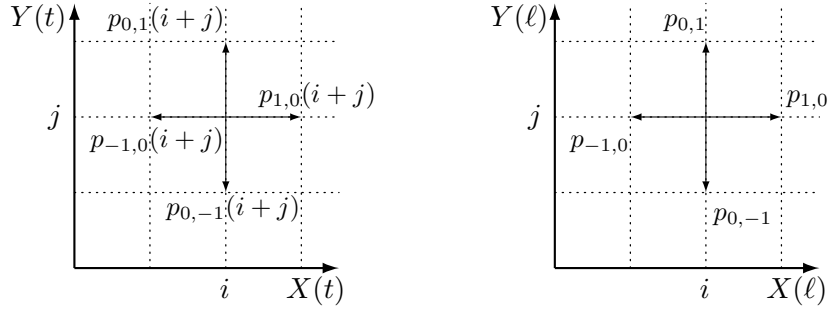


FIGURE 2. Taux de transition (pour le modèle  $(X(t), Y(t))_{t \in \mathbf{R}_+}$  à temps continu) et probabilités de transition (pour le modèle  $(X(\ell), Y(\ell))_{\ell \geq 0}$  à temps discret)

Les probabilités d'extinction partant d'une population initiale  $(i, j) \in \mathbf{Z}_+^2$  sont données par les formules

$$q_{i,j} = \mathbf{P}_{i,j}[\tau < \infty], \quad \tau = \inf\{\ell \geq 0 : X(\ell) = 0 \text{ ou } Y(\ell) = 0\}.$$

Les conditions au bord prennent la forme simple

$$q_{i,j} = 1, \quad \forall (i, j) \text{ tel que } i = 0 \text{ ou } j = 0.$$

Comme dans le cas de la dimension 1 on introduit la série génératrice

$$Q(x, y) = \sum_{i, j \geq 1} q_{i,j} x^{i-1} y^{j-1}, \quad \forall |x|, |y| < 1.$$

On essaie à présent d'imiter l'approche en trois étapes vue pour la dimension 1.

*Étape 1 : Trouver une équation fonctionnelle.* On va démontrer la relation

$$(4) \quad K(x, y)Q(x, y) = p_{-1,0} \frac{xy}{1-y} - p_{1,0}yQ(0, y) + p_{0,-1} \frac{xy}{1-x} - p_{0,1}xQ(x, 0),$$

où  $K(x, y)$  s'appelle le noyau du modèle et vaut

$$K(x, y) = xy[1 - (p_{1,0}x^{-1} + p_{-1,0}x + p_{0,1}y^{-1} + p_{0,-1}y)].$$

Il est important de remarquer que  $K(x, y)$  est un polynôme du second degré à la fois en  $x$  et en  $y$ .

*Preuve de l'équation (4).* On a l'égalité (une nouvelle fois conséquence de la propriété de Markov)

$$q_{i,j} = p_{1,0}q_{i+1,j} + p_{-1,0}q_{i-1,j} + p_{0,1}q_{i,j+1} + p_{0,-1}q_{i,j-1}, \quad \forall i, j \geq 1,$$

qu'on multiplie par  $x^i y^j$  puis qu'on somme sur  $i, j \geq 1$ . On trouve alors

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \geq 1} q_{i,j} x^i y^j &= p_{1,0} \sum_{i,j \geq 1} q_{i+1,j} x^i y^j + p_{-1,0} \sum_{i,j \geq 1} q_{i-1,j} x^i y^j + \dots \\ &= \frac{p_{1,0}}{x} \sum_{i \geq 2, j \geq 1} q_{i,j} x^i y^j + p_{-1,0} x \sum_{i \geq 0, j \geq 1} q_{i,j} x^i y^j + \dots \\ &= \frac{p_{1,0}}{x} \left( \sum_{i,j \geq 1} q_{i,j} x^i y^j - \sum_{j \geq 1} q_{1,j} x y^j \right) + p_{-1,0} x \left( \sum_{i,j \geq 1} q_{i,j} x^i y^j + \sum_{j \geq 1} y^j \right) + \dots \\ &= \left( \frac{p_{1,0}}{x} + p_{-1,0} x + \dots \right) \sum_{i,j \geq 1} q_{i,j} x^i y^j - p_{1,0} y Q(0, y) + p_{-1,0} \frac{xy}{1-y} + \dots, \end{aligned}$$

ce qui démontre bien l'équation (4), puisqu'on peut écrire  $Q(0, y) = \sum_{j \geq 1} q_{1,j} y^{j-1}$ .  $\square$

Cette équation fonctionnelle est profondément plus compliquée qu'en dimension 1 : on a en effet trois — et non une seule — fonctions génératrices inconnues. Il est important de noter qu'aucune manipulation simple (du type évaluer l'équation en  $x = 0$  ou en  $y = 0$ ) ne donne d'information pertinente.

*Étape 2 : Calculer les quantités inconnues se trouvant à droite dans l'équation (4).* Comme dans le cas de la dimension 1, on commence par évaluer (4) en une valeur  $(x, y)$  annulant le noyau, et par là même le terme de gauche de l'équation — pourvu que  $(x, y)$  appartienne au domaine de définition de  $Q(x, y)$ . À  $y$  fixé, il y a deux valeurs de  $x$  possibles, disons  $x$  et  $p_{1,0}/(p_{-1,0}x)$ , qu'on note  $\tilde{x}$  (l'expression de  $\tilde{x}$  provient des relations coefficients racines, voir l'expression du noyau). On évalue alors (4) en  $x$  et  $\tilde{x}$ . On trouve

$$\begin{aligned} p_{-1,0} \frac{xy}{1-y} - p_{1,0}yQ(0, y) + p_{0,-1} \frac{xy}{1-x} - p_{0,1}xQ(x, 0) &= 0, \\ p_{-1,0} \frac{\tilde{x}y}{1-y} - p_{1,0}yQ(0, y) + p_{0,-1} \frac{\tilde{x}y}{1-\tilde{x}} - p_{0,1}\tilde{x}Q(\tilde{x}, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Si on calcule la différence des deux équations ci-dessus on peut écrire

$$(5) \quad p_{0,1}xQ(x, 0) - p_{0,1}\tilde{x}Q(\tilde{x}, 0) = p_{0,-1} \frac{xy}{1-x} - p_{0,-1} \frac{\tilde{x}y}{1-\tilde{x}} + p_{-1,0} \frac{xy}{1-y} - p_{-1,0} \frac{\tilde{x}y}{1-y}.$$

L'équation ci-dessus exprime un lien entre la même fonction  $Q(x, 0)$  évaluée en deux valeurs de  $x$  différentes. Mais comment en déduire une information non triviale? Le mieux est de choisir  $x \in \mathbf{C}$  de module égal à

$$|x| = \sqrt{\frac{p_{1,0}}{p_{-1,0}}} > 1.$$

La raison est qu'alors  $\tilde{x} = \bar{x}$ , le conjugué de  $x$ . On appelle  $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$  le disque unité ouvert centré en 0 et de rayon  $\sqrt{\frac{p_{1,0}}{p_{-1,0}}}$  (voir la figure 3). La condition

$$(6) \quad p_{0,1}xQ(x, 0) - p_{0,1}\bar{x}Q(\bar{x}, 0) = p_{0,-1}\frac{xy}{1-x} - p_{0,-1}\frac{\bar{x}y}{1-\bar{x}} + p_{-1,0}\frac{xy}{1-y} - p_{-1,0}\frac{\bar{x}y}{1-y}.$$

a lieu sur  $\partial\mathbf{D}$ . Cette condition au bord sur une courbe fermée est l'un des éléments d'un problème frontière de type Riemann-Carleman.

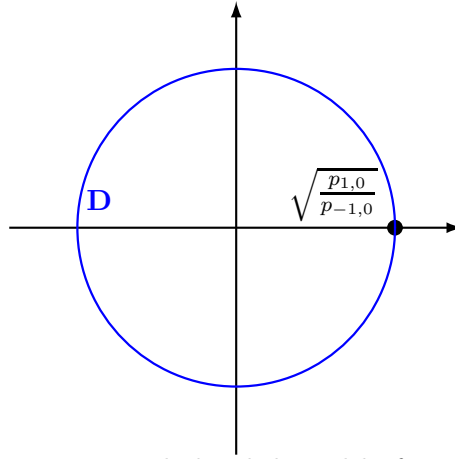


FIGURE 3. Le domaine  $\mathbf{D}$  sur le bord duquel la fonction  $Q(x, 0)$  satisfait une condition frontière

La condition (5), même sur un domaine comme  $\partial\mathbf{D}$ , ne permet pas de caractériser la fonction  $Q(x, 0)$ . Il faut en effet spécifier l'espace de fonctions dans lequel chercher  $Q(x, 0)$ . Nous ne développerons pas cet aspect-là, il provient d'une analyse fine de l'équation fonctionnelle et de la dualité entre  $Q(x, 0)$  et  $Q(0, y)$ . Nous renvoyons à [5] pour de plus amples détails.

Quoiqu'il en soit, si on mène l'analyse jusqu'au bout, on obtient les trois conditions suivantes (formant un problème frontière), qui caractérisent la fonction  $Q(x, 0)$  :

- (i) La fonction  $Q(x, 0)$  est analytique dans  $\mathbf{D} \setminus \{1\}$ ;
- (ii) La fonction  $Q(x, 0)$  est continue dans  $\overline{\mathbf{D}} \setminus \{1\}$ ;
- (iii) La fonction  $Q(x, 0)$  satisfait pour  $x \in \partial\mathbf{D}$  la condition (6).

On en déduit que

$$(7) \quad Q(x, 0) = \frac{(1 - p_{0,-1}/p_{0,1} + p_{0,-1}p_{1,0}/(p_{0,1}p_{-1,0}) - x)}{(1-x)(p_{1,0}/p_{-1,0} - x)}.$$

*Preuve de l'équation (7).* Nous ne donnons ici qu'une esquisse de preuve. Pour  $t \in \mathbf{D}$  fixé on multiplie l'équation (5) par  $1/(x-t)$ , puis on intègre pour  $x \in \partial\mathbf{D}$ . Une application du théorème des résidus donne que le membre de gauche vaut  $2i\pi p_{0,1}tQ(t,0)$ . Pour obtenir le membre de droite de l'équation (7) on applique également le théorème des résidus (cela nécessite d'étudier la fonction  $Y(x)$  définie par  $K(x, Y(x)) = 0$ ).  $\square$

*Étape 3 : Revenir à l'équation fonctionnelle, et obtenir une expression pour la fonction inconnue du membre de gauche.* Cette étape-là est aussi simple qu'en dimension 1. Grâce aux expressions de  $Q(x,0)$  et  $Q(0,y)$  et à l'équation fonctionnelle, on trouve après simplifications que

$$Q(x,y) = \sum_{i,j \geq 1} \left\{ 1 - \left(1 - \left(\frac{p_{-1,0}}{p_{1,0}}\right)^i\right) \left(1 - \left(\frac{p_{0,-1}}{p_{0,1}}\right)^j\right) \right\} x^{i-1} y^{j-1},$$

ce qui fournit immédiatement une expression pour les probabilités d'extinction  $q_{i,j}$ .

### 3. GÉNÉRALISATIONS

#### 3.1. Marches aléatoires homogènes non simples, aux huit plus proches voisins.

Dans ce cadre l'approche ci-dessus fonctionne selon les mêmes principes. On obtient facilement une équation de récurrence double pour les probabilités d'extinction, qu'on transforme sans difficulté en équation fonctionnelle. Mutatis mutandis, les items (i), (ii) et (iii) (avec une condition frontière de type (6)) formant le problème frontière sont encore valables. La différence majeure (qui est source de complications techniques) concerne le domaine  $\mathbf{D}$  : pour une marche quelconque, le bord du domaine  $\mathbf{D}$  n'est plus un cercle, mais une quartique. Dans l'analyse apparaît alors une représentation conforme de ce domaine (elle permet en effet de se ramener à un problème frontière plus standard, par exemple sur un disque), qu'il s'agit d'étudier précisément si on veut obtenir des informations concrètes sur les séries génératrices. De nombreux détails pourront être trouvés dans le livre [5].

#### 3.2. Marches aléatoires homogènes avec sauts quelconques.

L'étape suivante dans la généralisation est de regarder une population de deux types dont l'évolution est gouvernée par une marche aléatoire avec des sauts d'amplitude plus grande que 1. D'un point de vue de l'approche analytique, c'est un sujet de recherche actuel, avec des challenges techniques remarquables. On démontre assez facilement qu'il existe toujours une équation fonctionnelle, qui comporte plus de fonctions inconnues (le nombre dépend de l'amplitude des sauts) ; il s'avère qu'il y a également plus de problèmes frontière. Nous ne développerons pas plus ici.

#### 3.3. Marches aléatoires non homogènes.

Le but de cette section est d'illustrer la possible extension de l'approche analytique au cas des marches aléatoires non homogènes (spatialement). S'il me paraît illusoire de penser traiter n'importe quelle population (de deux types) inhomogène par cette approche, nous verrons que lorsque l'inhomogénéité est relativement simple, certaines méthodes continuent de fonctionner.

Les modèles et résultats ci-dessous proviennent de l'article [12]. On s'intéresse à une population de deux types dont l'évolution est donnée figure 4. Le modèle biologique (dans [12] il s'agit d'une population de fleurs) ainsi que les raisons faisant que l'évolution est



bien gouvernée par les probabilités données sur la figure 4 sont présentés en détails dans [12].

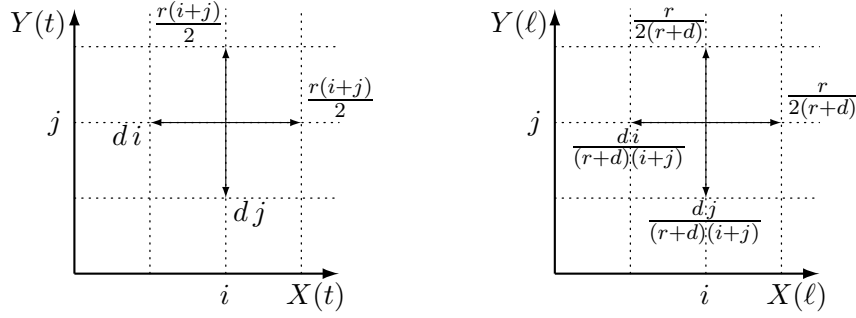


FIGURE 4. Taux de transition (pour le modèle  $(X(t), Y(t))_{t \in \mathbf{R}_+}$  à temps continu) et probabilités de transition (pour le modèle  $(X(\ell), Y(\ell))_{\ell \geq 0}$  à temps discret). Les paramètres  $r$  et  $d$  sont, respectivement, les taux de production et de mort des individus

On déduit immédiatement de la figure 4 que les probabilités d'extinction

$$q_{i,j} = \mathbf{P}_{i,j}[\tau < \infty], \quad \tau = \inf\{\ell \geq 0 : X(\ell) = 0 \text{ ou } Y(\ell) = 0\},$$

satisfont la relation de récurrence (non-homogène)

$$(8) \quad q_{i,j} = \frac{di}{(r+d)(i+j)} q_{i-1,j} + \frac{dj}{(r+d)(i+j)} q_{i,j-1} + \frac{r}{2(r+d)} q_{i,j+1} + \frac{r}{2(r+d)} q_{i+1,j}, \quad \forall i, j \geq 1.$$

On essaie à présent d'imiter l'approche en trois étapes vue pour la dimension 1 et la dimension 2 dans le cas homogène.

*Étape 1 : Trouver une équation fonctionnelle.* Dans cette nouvelle situation elle vaut

$$(9) \quad \mathcal{A}Q(x, y) = h(x, y, Q),$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{A}Q(x, y) = P(x, y) \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) + P(y, x) \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) + R(x, y)Q(x, y), \\ P(x, y) = (r+d)x - \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \frac{x}{y} - dx^2, \\ R(x, y) = \frac{r}{2x} + \frac{r}{2y} - dx - dy, \\ h(x, y, Q) = -\frac{r}{2} (\sum_{i \geq 1} q_{i,1} i x^i + \sum_{j \geq 1} q_{1,j} j y^j) + d \frac{xy}{1-x} + d \frac{xy}{1-y}. \end{cases}$$

On a donc maintenant une EDP, et non plus une équation fonctionnelle linéaire non dérivée! On remarque qu'une nouvelle fois les séries  $1/(1-x)$  et  $1/(1-y)$  apparaissent, comme d'ailleurs les séries génératrices sectionnelles  $Q(x, 0)$  et  $Q(0, y)$  — mais ces dernières sous forme dérivée. Obtenir l'équation (9) se fait exactement de la même façon que pour (4).

*Étape 2 : Calculer les quantités inconnues se trouvant à droite dans l'équation (9).* C'est essentiellement un problème ouvert! On peut d'abord remarquer qu'on ne peut pas utiliser la même idée — à savoir évaluer l'équation fonctionnelle en une infinité de points  $(x, y)$  tels que le membre de gauche de l'équation devient nul. La raison est simplement qu'en général

il n'y a pas de points  $(x, y)$  pour lesquels simultanément  $R(x, y) = P(x, y) = P(y, x) = 0$ . Toute idée est donc la bienvenue!

*Étape 3 : Revenir à l'équation fonctionnelle, et obtenir une expression pour la fonction inconnue du membre de gauche.* Dans le cas de la dimension 1, comme d'ailleurs dans celui de la dimension 2 homogène, la troisième étape était très simple : elle était une conséquence triviale de la deuxième et de l'équation fonctionnelle. Dans le cas présent, même si l'on supposait avoir résolu la deuxième étape et ainsi disposer d'une expression de  $h(x, y, Q)$ , cette dernière étape serait complexe, puisqu'on doit alors résoudre une EDP! (Cela dit c'est faisable, en utilisant des méthodes standard en EDP, voir [12, Section 3] pour le cas très particulier qui nous intéresse.)

Voici tout de même quelques méthodes alternatives (notamment à l'étape 2) pour le calcul des fonctions génératrices inconnues (ou directement des probabilités d'extinction).

- On peut simuler la marche aléatoire et appliquer des méthodes de Monte-Carlo, et ce faisant obtenir des approximations (avec des intervalles de confiance) pour les probabilités d'extinction, voir [12, Section 4.1]. Cette méthode fonctionne indifféremment pour tous les  $q_{i,j}$ .
- On peut aussi utiliser des méthodes déterministes qui, partant de la récurrence (8), donnent les  $(q_{i,j})_{0 \leq i, j \leq N}$  en termes des  $(q_{N,j})_{0 \leq j \leq N}$  and  $(q_{i,N})_{0 \leq i \leq N}$ , voir [12, Section 4.2].
- Finalement, pour des couples  $(i, j)$  tels que  $i$  est très grand mais  $j$  est borné (ou vice-versa), on peut calculer les probabilités  $q_{i,j}$  en faisant des approximations avec des marches aléatoires 1-dimensionnelles, voir [12, Section 2.2]. En effet avec de grandes chances si la marche aléatoire partant d'un tel  $(i, j)$  atteint l'un des axes, ce sera l'axe vertical!

#### 4. CONCLUSION

L'approche analytique est donc potentiellement très puissante : elle permet d'obtenir des résultats d'une grande précision (expression exacte des séries génératrices d'intérêt, mais aussi asymptotique des coefficients — par des méthodes d'analyse des singularités — ou encore nature rationnelle ou algébrique de la série génératrice). De plus elle s'applique à une classe vaste de problèmes de marches dans le quart de plan, allant de la recherche des probabilités stationnaires de marches aléatoires ergodiques réfléchies au bord du quart de plan à l'analyse des fonctions discrètes harmoniques de marches tuées au bord du quadrant, en passant par le calcul des nombres déterministes de chemins confinés dans le quart de plan. Cependant de nombreux efforts restent à faire pour développer cette approche, dans le but notamment qu'elle puisse s'appliquer à des marches avec de grands sauts ou encore à des marches avec des inhomogénéités spatiales.

### Troisième partie 3. Mouvement Brownien dans des cônes (Séance 3/3)

Dans cette partie l'objet principal d'étude est le mouvement Brownien dans un cône fixé  $C \subset \mathbf{R}^d$  ( $d \geq 1$ ) — ou, de façon équivalente, le mouvement Brownien absorbé (ou tué) au premier temps de sortie de  $C$ . Voici notre définition précise d'un cône : étant donné un sous-ensemble connexe et ouvert  $\Theta$  de la sphère unité  $\mathbf{S}^{d-1} \subset \mathbf{R}^d$ ,  $C$  est l'ensemble des droites partant de l'origine et passant par  $\Theta$ , à savoir

$$C = \{\lambda\theta : \lambda > 0, \theta \in \Theta\},$$

voir la figure 5 pour un exemple.

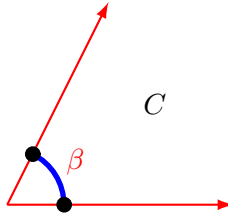


FIGURE 5. En dimension 2, tout cône  $C$  est caractérisé par son angle d'ouverture  $\beta$

Les motivations de cette étude sont notamment :

- la construction du mouvement Brownien conditionné à rester dans un cône (par exemple à une chambre de Weyl) ;
- la construction du mouvement Brownien partant de l'origine d'un cône (parfois appelé le méandre Brownien) ;
- les problèmes de temps d'occupation ;
- les applications aux marches aléatoires dans les cônes.

Plus spécifiquement on s'intéressera à la probabilité de rester dans un cône fixé  $C \subset \mathbf{R}^d$  pour un mouvement Brownien  $(B(t))_{t \geq 0}$  (avec une matrice de covariance identité — ce n'est pas une restriction puisqu'on peut changer de cône — et un drift quelconque) qui part de  $x$ , à savoir

$$(10) \quad \mathbf{P}_x[T_C > t], \quad T_C = \inf\{t \geq 0 : B(t) \notin C\},$$

et son asymptotique en temps long

$$(11) \quad \mathbf{P}_x[T_C > t] = \kappa h(x) t^{-\alpha} e^{-\gamma t} (1 + o(1)), \quad t \rightarrow \infty.$$

#### 5. LA DIMENSION 1 ET EXEMPLES SIMPLES EN DIMENSION 2

**La dimension 1 : le mouvement Brownien dans  $(0, \infty)$ .** Pour le Brownien sans dérive 1-dimensionnel, l'idée la plus naturelle (pour étudier la probabilité (10)) est d'utiliser l'égalité

$$\mathbf{P}_x[T_{(0,\infty)} > t] = \mathbf{P}_0 \left[ \min_{u \in [0,t]} B(u) > -x \right] = \mathbf{P}_0 \left[ \max_{u \in [0,t]} B(u) < x \right] = \mathbf{P}_0[|B(t)| < x],$$

et donc finalement

$$(12) \quad \mathbf{P}_x[T_{(0,\infty)} > t] = 2 \cdot \mathbf{P}_0[0 \leq B(t) < x] = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^x p(t; x, y) dy,$$

où on a noté  $p(t; x, y)$  la densité du mouvement Brownien (on réfère à [11] pour tous les résultats élémentaires sur le mouvement Brownien utilisés ici), c'est-à-dire

$$\mathbf{P}_x[B(t) \in dy] = p(t; x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/(2t)} dy.$$

Une idée alternative pour le calcul de  $g(t; x) = \mathbf{P}_x[T_{(0,\infty)} > t]$  est de dire que  $g(t; x)$  satisfait l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta) g(t; x) = 0, & \forall x \in (0, \infty), \forall t \in (0, \infty), \\ g(0; x) = 1, & \forall x \in (0, \infty), \\ g(t; 0) = 0, & \forall t \in (0, \infty), \end{cases}$$

où le Laplacien vaut simplement  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . On peut le vérifier directement à partir de l'équation (12), mais en réalité c'est un fait très général, valable en toute dimension et pas seulement pour des cônes.

Une autre façon d'arriver à la conclusion que  $g(t; x)$  satisfait l'équation de la chaleur est la suivante : par le principe de réflexion, la densité du mouvement Brownien dans le cône  $C = (0, \infty)$  vaut <sup>1</sup>

$$\mathbf{P}_x[B(t) \in dy, T_{(0,\infty)} > t] = q(t; x, y) dy = [p(t; x, y) - p(t; x, -y)] \mathbb{1}_{\{y>0\}} dy.$$

La fonction  $q(t; x, y)$  s'appelle le noyau de la chaleur, elle satisfait aussi l'équation de la chaleur (on le déduit du fait bien connu que  $p(t; x, y)$  satisfait, pour tout  $y$  fixé, l'équation de la chaleur). On a en particulier, pour tout  $t > 0$ ,

$$(13) \quad \mathbf{P}_x[T_{(0,\infty)} > t] = \int_0^\infty q(t; x, y) dy,$$

et par intégration  $g(t; x)$  satisfait encore l'équation de la chaleur.

Quant au Brownien avec drift  $a \in \mathbf{R}$ , sa densité est égale à  $(p(t; x, y))$  étant celle du Brownien sans dérive)

$$\mathbf{P}_x[B(t) \in dy] = e^{a(y-x)-ta^2/2} p(t; x, y) dy,$$

et l'expression (13) est toujours valable (en remplaçant convenablement la densité).

Il y a trois régimes pour l'asymptotique de la probabilité (10), selon le signe de la dérive  $a \in \mathbf{R}$ . On l'étudie à partir de l'équation (13). Précisément, avec des notations évidentes, on a pour tout  $x > 0$ , lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,

$$(14) \quad \mathbf{P}_x[T_{(0,\infty)} > t] = (1 + o(1)) \begin{cases} \frac{x e^{-ax} e^{-ta^2/2}}{\sqrt{2\pi a^2 t^{3/2}}} & \text{si } a < 0, \\ \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{\pi t}} & \text{si } a = 0, \\ 1 - e^{-2ax} & \text{si } a > 0. \end{cases}$$

---

1. L'expression — ou plutôt le type d'expression — de la densité du mouvement Brownien dans le cône  $C = (0, \infty)$  se généralise au cas de chambres de Weyl en dimension supérieure.

À titre d'application de ce résultat, on peut calculer la loi du processus

$$\mathbf{P}_x[B(t) \in dy | T_{(0,\infty)} = \infty] = \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x[B(t) \in dy | T_{(0,\infty)} > u],$$

et constater qu'il s'agit d'un processus de Bessel.

**Les cas du demi-plan et du quart de plan.** En dimension 2, tout cône ouvert est une rotation de

$$\{\rho e^{i\theta} : \rho > 0, 0 < \theta < \beta\}$$

pour un certain  $\beta \in (0, 2\pi]$ , voir la figure 5. Pour certains cônes spécifiques, la probabilité de non-absorption est facile à trouver : c'est le cas pour le cône défini par le demi-plan supérieur ( $\beta = \pi$ ), car c'est en substance un cas 1-dimensionnel. C'est également facile pour le quart de plan  $Q$  ( $\beta = \pi/2$ ). En effet, par indépendance des coordonnées  $(B^{(1)}, B^{(2)})$  du mouvement Brownien  $B$  et notant  $x = (x_1, x_2)$  le point de départ, la probabilité de non-absorption est

$$\mathbf{P}_x[T_Q > t] = \mathbf{P}_{x_1}[T_{(0,\infty)}(B^{(1)}) > t] \cdot \mathbf{P}_{x_2}[T_{(0,\infty)}(B^{(2)}) > t].$$

Si on écrit  $a = (a_1, a_2)$  les coordonnées du drift et si on utilise (14), on en déduit tout de suite l'asymptotique de la forme (11), voir figure 6 pour la valeur de  $\alpha$ .

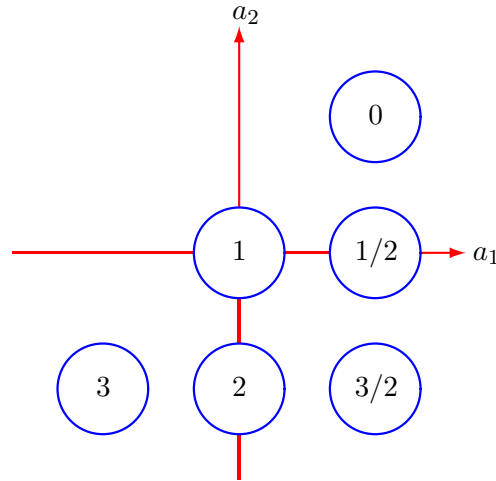


FIGURE 6. Valeur de  $\alpha$  dans (11) en fonction de la position du drift  $(a_1, a_2)$  dans le plan

## 6. THÉORIE GÉNÉRALE

La présentation ci-dessous suit pour l'essentiel les articles [3] et [1]. Comme nous avons vu précédemment, la probabilité  $g(t; x) = \mathbf{P}_x[T_C > t]$  qu'un mouvement Brownien partant de  $x \in C$  soit encore dans le cône au temps  $t$  satisfait l'équation de la chaleur

$$(15) \quad \begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta \right) g(t; x) = 0, & \forall x \in C, \forall t \in (0, \infty), \\ g(0; x) = 1, & \forall x \in \overset{\circ}{C}, \\ g(t; x) = 0, & \forall x \in \partial C, \forall t \in (0, \infty), \end{cases}$$

où  $\Delta$  désigne le Laplacien. On en déduit une expression (en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  pour la dimension 2)

$$(16) \quad \mathbf{P}_x[T_C > t] = \sum_{k \geq 1} c_k \sin(\mu_k \theta) A_k(t/r^2),$$

où les  $c_k$  et  $A_k$  seront calculés plus tard.

**Intuition sur le fait d'obtenir une expression type série de Fourier.** En dimension 1 on regarde l'intervalle  $U = (0, \pi)$  et on résout l'équation de la chaleur (cette discussion est empruntée au livre [13, section 2.5.1])

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta \right) g(t; x) = 0, & \forall x \in (0, \pi), \forall t \in (0, \infty), \\ g(0; x) = f(x), & \forall x \in (0, \pi), \\ g(t; x) = 0, & \forall x \in \{0, \pi\}, \forall t \in (0, \infty). \end{cases}$$

Si on cherche une solution de la forme  $e^{-\lambda t} \phi(x)$  à variables séparées on trouve l'équation  $\phi''(x) = -2\lambda \phi(x)$ , dont les solutions sont

$$\phi(x) = c_1 \cos(\sqrt{2\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{2\lambda}x).$$

Les conditions au bord donnent que  $c_1 = 0$  et  $\lambda = k^2/2$ , pour un certain  $k \geq 1$ . On a donc une famille de solutions de la forme (on ne se préoccupe pas ici de la convergence)

$$\sum_{k \geq 1} a_k e^{-tk^2/2} \sin(kx), \quad \forall x \in [0, \pi].$$

On trouverait les coefficients  $a_k$  en faisant un développement en série de Fourier de la condition initiale  $f$ .

## En dimension 2.

*Preuve de (16) en dimension 2.* On passe en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , et on utilise une propriété d'homogénéité du Brownien affirmant que la solution  $g(t; x)$  du problème (15) est en fait une fonction de  $t$  et  $s = t/r^2$ , on pose donc  $u(s, \theta) = g(t; r, \theta)$ . Cette dernière condition implique une équation supplémentaire  $(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{r}{2t} \frac{\partial}{\partial r})g(t; r, \theta) = 0$ . Le premier problème se transforme ainsi en (ci-dessous on note  $L_s$  l'opérateur  $s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2(2s - 1) \frac{\partial}{\partial s}$ )

$$\begin{cases} \left( L_s + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u(s, \theta) = 0, & \forall r e^{i\theta} \in C, \forall s \in (0, \infty), \\ u(0, \theta) = 1, & \forall r e^{i\theta} \in \overset{\circ}{C}, \\ u(s, \theta) = 0, & \forall r e^{i\theta} \in \partial C, \forall s \in (0, \infty). \end{cases}$$

Le problème ci-dessus peut se résoudre par la méthode de séparation des variables. Si une solution s'écrit  $A(s)B(\theta)$ , alors on a

$$(17) \quad \frac{L_s(A(s))}{A(s)} = -\frac{B''(\theta)}{B(\theta)}.$$

Les membres de gauche et de droite de l'équation (17) ne dépendent respectivement que de  $s$  et de  $\theta$ , les forçant à valoir une même constante  $\lambda$ . En particulier  $B''(\theta) + \lambda B(\theta) = 0$ , avec la condition au bord  $B(0) = B(\beta) = 0$ , ce qui oblige  $\lambda$  à être de la forme  $\mu_k^2 = (k\pi/\beta)^2$ , pour  $k$  entier strictement positif — la solution correspondante étant  $B(\theta) = \sin(\mu_k \theta)$ . À

chaque  $\mu_k^2$  correspond une solution du membre de gauche de (17), pouvant s'exprimer avec une série hypergéométrique  ${}_1F_1$ , à savoir

$$A_k(s) = (2s)^{-\mu_k/2} {}_1F_1(\mu_k/2, \mu_k + 1, -1/(2s)),$$

avec

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} A_k(s) = \frac{2^{\mu_k}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\mu_k + 1}{2}\right).$$

Par complétude de l'ensemble des vecteurs propres (le développement en série de Fourier dans notre cas), la solution peut s'écrire comme une combinaison infinie du type (16). Les coefficients  $c_k$  sont donnés par le développement en série de Fourier de la condition au bord  $u(0, \theta) = 1$ .  $\square$

**Cônes en dimension quelconque.** La solution présentée ci-dessus en dimension 2 fonctionne encore, mais les nouvelles fonctions propres ne sont plus des fonctions sinus, mais des fonctions propres du Laplacien sur le domaine  $\mathbf{S}^{d-1} \cap C$ , à savoir des solutions de

$$(18) \quad \begin{cases} L_{\mathbf{S}^{d-1}} m = -\lambda m & \text{dans } \mathbf{S}^{d-1} \cap C, \\ m = 0 & \text{dans } \partial(\mathbf{S}^{d-1} \cap C). \end{cases}$$

## 7. APPLICATION AUX MARCHES ALÉATOIRES DANS DES CÔNES

**Différentes approches.** On revient maintenant aux marches aléatoires  $(S(\ell))_{\ell \geq 0}$  dans des cônes  $C \subset \mathbf{R}^d$ . On voudrait trouver une expression explicite ou asymptotique de la probabilité

$$(19) \quad \mathbf{P}_x[\tau_C > n], \quad \tau_C = \inf\{\ell \geq 0 : S(\ell) \notin C\}.$$

Voici quelques approches possibles :

- la factorisation de Wiener-Hopf (en dimension 1 seulement) ;
- la méthode présentée partie 1, du type grandes déviations ;
- la méthode analytique présentée dans la partie 2 (elle fonctionne en dimension 2 seulement, presque uniquement pour des marches aux huit plus proches voisins) ;
- des méthodes issues de la théorie des représentations (typiquement dans le cas de chambres de Weyl — on pourra consulter [14] pour un travail récent dans ce domaine) ;
- des idées de comparaison avec le mouvement Brownien (par Denisov et Wachtel [4]).

On va se concentrer sur la dernière approche. Elle donne des résultats variés comme des théorèmes limite locaux (c'est-à-dire concernant le comportement asymptotique de la probabilité  $\mathbf{P}_x[S(n) = y, \tau_C > n]$ ), des applications au comptage de chemins (voir plus bas pour une présentation détaillée), la convergence du processus conditionné  $\mathbf{P}[\frac{x+S(n)}{\sqrt{n}} \in dy | \tau_x > n]$ , une étude des fonctions discrètes harmoniques, etc.

**Comparaison avec le mouvement Brownien.** L'idée principale est le couplage avec le mouvement Brownien. C'est une idée très naturelle, mais du fait de la spécificité de la structure de cône, on ne peut pas l'utiliser naïvement, c'est-à-dire globalement pour toute la trajectoire — on obtiendrait sinon seulement une asymptotique imprécise, du type

$$\mathbf{P}_x[\tau_C > n] = n^{-\alpha+o(1)}(c + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Pour trouver l'asymptotique exacte il faut en fait attendre que la marche aléatoire soit loin de l'origine. C'est là qu'on utilise des résultats de couplage du type Götze et Zaitsev [9] ou Sakhanenko :

**Lemme ([9]).** *Soit  $(S(\ell))_{\ell \geq 0}$  une marche aléatoire dont les accroissements  $(X(i))_{i \geq 0}$  admettent des moments d'ordre  $2 + \delta$ , pour un certain  $\delta \in (0, 1)$ . On peut alors définir sur le même espace probabilisé un mouvement Brownien tel que pour tout  $0 < \gamma < \frac{\delta}{2(2+\delta)}$ ,*

$$\mathbf{P} \left[ \sup_{u \leq n} \left| \frac{S(\lfloor u \rfloor) - B(u)}{\sqrt{n}} \right| \geq n^{-\gamma} \right] \leq cn^{-\epsilon},$$

avec  $\epsilon = \delta/2 - \gamma(2 + \delta) > 0$ .

Ce résultat est plus fort que le principe d'invariance de Donsker.

**Lemme (Principe d'invariance de Donsker).** *Soit  $(S(\ell))_{\ell \geq 0}$  une marche aléatoire dont les accroissements  $(X(i))_{i \geq 0}$  admettent des moments d'ordre  $2 + \delta$ , pour un certain  $\delta \in (0, 1)$ . Soit pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $n \geq 0$ ,*

$$Z_n(t) = \frac{S(\lfloor nt \rfloor) + (nt - \lfloor nt \rfloor)X(\lfloor nt \rfloor + 1)}{\sqrt{n}}.$$

Alors le processus  $(Z_n(t))_{t \in [0, 1]}$  converge en loi vers un mouvement Brownien  $(B(t))_{t \in [0, 1]}$ .

On peut alors trouver l'asymptotique de  $\mathbf{P}_y[\tau_C > n]$  pour  $y$  loin de l'origine. On déduit l'asymptotique qui nous intéresse (pour toute valeur de  $x$ ) notamment par une application de la propriété de Markov, en découpant la trajectoire en plusieurs morceaux, et en démontrant qu'avec une grande probabilité la marche ira loin de l'origine si elle reste dans le cône.

**Application au comptage de chemins confinés dans des cônes.** On considère ici

- un ensemble de sauts  $\mathfrak{S} \subset \mathbf{Z}^d$  ( $d \geq 2$ );
- un cône convexe  $C \subset \mathbf{R}^d$ ;
- $f_{\mathfrak{S}}(x, y; n) = \#\{\text{marches confinées dans } C, \text{ évoluant selon } \mathfrak{S}, \text{ de longueur } n, \text{ partant de } x \text{ et se terminant en } y\}$ .

Dans la partie 1 nous avons énoncé des résultats concernant  $f_{\mathfrak{S}}(x; n) = \sum_{y \in C} f_{\mathfrak{S}}(x, y; n)$  (voir l'équation (1)). Les méthodes de Denisov et Wachtel [4] donnent des résultats sur les nombres de marches  $f_{\mathfrak{S}}(x, y; n)$ , et plus précisément sur leur asymptotique

$$f_{\mathfrak{S}}(x, y; n) = c(x, y)\rho^n n^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Précisément, en partant de leurs théorèmes limite locaux ils démontrent que

- $c(x, y)$  s'exprime en terme de fonctions discrètes harmoniques;
- $\rho = \min_{u \in \mathbf{R}^d} L_{\mathfrak{S}}(u)$ ;
- $\alpha = \sqrt{\lambda_1 + (d/2 - 1)^2} - (d/2 - 1)$ , où  $\lambda_1$  est la première valeur propre de (18).



## RÉFÉRENCES

- [1] R. Bañuelos & R. G. Smits (1997). Brownian motion in cones. *Probab. Theory Related Fields* **108** 299–319.
- [2] M. Bousquet-Mélou & M. Mishna (2010). Walks with small steps in the quarter plane. In *Algorithmic probability and combinatorics, Contemp. Math.* **520** 1–39. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [3] R. D. DeBlasie (1987). Exit times from cones in  $\mathbf{R}^n$  of Brownian motion. *Probab. Theory Related Fields* **74** 1–29.
- [4] D. Denisov & V. Wachtel (2011). Random walks in cones. *Ann. Probab.*, to appear.
- [5] G. Fayolle, R. Iasnogorodski & V. Malyshev (1999). *Random walks in the quarter plane*. Springer-Verlag, Berlin.
- [6] G. Fayolle & K. Raschel (2012). Some exact asymptotics in the counting of walks in the quarter plane. In *23rd Intern. Meeting on Probabilistic, Combinatorial, and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms (AofA'12)*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AQ, 109–124. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy.
- [7] W. Feller (1957). *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [8] R. Garbit & K. Raschel (2013). On the exit time from a cone for random walks with drift. *Preprint arXiv:1306.6761*.
- [9] F. Götze & A. Y. Zaitsev (2010). The accuracy of approximation in the multidimensional invariance principle for sums of independent identically distributed random vectors with finite moments. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* **368** (2009), Veroyatnost i Statistika. 15, 110–121, 283–284; translation in *J. Math. Sci. (N. Y.)* **167** (2010) 495–500.
- [10] S. Johnson, M. Mishna & K. Yeats (2013). Towards a combinatorial understanding of lattice path asymptotics. *Preprint arXiv:1305.7418*.
- [11] I. Karatzas & S. Shreve (1991). *Brownian motion and stochastic calculus*. Second edition. Springer-Verlag, New York.
- [12] P. Lafitte-Godillon, K. Raschel & V. C. Tran (2013). Extinction probabilities for a distylous plant population modeled by an inhomogeneous random walk on the positive quadrant. *SIAM J. Appl. Math.* **73** 700–722.
- [13] G. Lawler (2010). *Random walk and the heat equation*. Student Mathematical Library, 55. American Mathematical Society, Providence, RI.
- [14] C. Lecouvey, E. Lesigne & M. Peigné (2012). Random walks in Weyl chambers and crystals. *Proc. Lond. Math. Soc.* **104** 323–358.