

502 P - Mécanique analytique - 2010/2011

Contrôle Continu du 03/11/2010. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

Le mouvement d'un système mécanique est décrit par les équations différentielles suivantes:

$$2\ddot{x} + \ddot{y} = -2x \quad \ddot{x} + \ddot{y} = -y$$

- a) Trouver les constantes a , b , c , d et e pour que ces équations soient celles du lagrangien $L = a\dot{x}^2 + b\dot{y}^2 + c\dot{x}\dot{y} + dx^2 + ey^2$.
- b) Déterminer les modes propres du mouvement et écrire la solution générale.

Exercice 2 :

Un point matériel M de masse m est soumis à une accélération centrale dirigée vers un point fixe O et proportionnelle à:

$$\frac{1}{r^2} \times e\left(\frac{k}{r}\right) ,$$

où r est la distance de M à l'origine O et k est une constante.

- 1) Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O et montrer que le mouvement de M est un mouvement plan (*On calculera la dérivée du moment cinétique par rapport au temps et on montrera qu'il est constant*). Le mouvement de M sera par la suite étudié dans ce plan. Quel est le système de coordonnées le plus adapté à ce mouvement?
- 2) Calculer le lagrangien correspondant à ce mouvement.
- 3) Ecrire les équations du mouvement dans le formalisme lagrangien.
- 4) Donner deux constantes du mouvement.
- 5) Montrer qu'une orbite circulaire, du point M , est possible et donner l'expression de son rayon. Démontrer que cette orbite n'est stable que si son rayon est supérieur à k .

502 P - Mécanique analytique - 2009/2010

Examen du 04/01/2010. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

Une particule de charge q et de masse m se déplace dans un champ magnétique \vec{B} . Ces coordonnées sont notées x_i ($i = 1, 2, 3$) et son vecteur vitesse est \vec{v} .

a) Ecrire, sous forme vectorielle, les équations du mouvement de Newton pour cette particule. Le hamiltonien décrivant ce mouvement est donné par

$$H(p_i, x_i) = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 (p_j - qA_j) (p_j - qA_j) \quad ,$$

où $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ et \vec{A} ne dépend pas explicitement du temps ($\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$).

b) Montrer que les équations de Hamilton sont équivalentes aux équations du mouvement de Newton.

c) Résoudre les équations du mouvement pour un champ magnétique constant dirigé selon le troisième axe. A l'instant initial la particule est à l'origine et sa vitesse est \vec{v}_0 .

Exercice 2 :

1) Soit $H(p_i, q_i, t)$ l'hamiltonien d'un système et $F(p_i, q_i, t)$ une variable dynamique quelconque. Montrer que $\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$. Conclusion.

En déduire la forme des équations d'Hamilton en terme des crochets de Poisson.

2) Une particule de masse m se déplace dans l'espace à trois dimensions (x_1, x_2, x_3) . Son hamiltonien est

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m} - \frac{k}{r} \quad ,$$

où k est une constante positive et r est le module du vecteur position \vec{r} .

a) Montrer que le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ est conservé (le vecteur \vec{p} a comme composantes les p_i). En déduire que le mouvement s'effectue dans un plan. Donner (sans faire de calcul) une autre constante du mouvement. Que représente-t-elle?

- b)** Ecrire le hamiltonien dans les coordonnées sphériques (r, θ, φ) .
- c)** Déterminer la coordonnée cyclique et la constante du mouvement correspondante. Que représente cette constante? Cette constante peut être choisie égale à zéro. Pourquoi? Retrouver alors le résultat en **a)**. Avec ce choix, donner l'expression du nouveau hamiltonien.
- d)** Ecrire les équations de Hamilton.
- e)** Etudier graphiquement le mouvement et montrer qu'il y a trois types de mouvements possibles. Donner un exemple physique (parmi les mouvements d'objets célestes) pour chaque cas.

502 P - Mécanique analytique - 2009/2010

Examen du 07/06/2010. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

Une particule de charge q et de masse m se déplace dans un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) . Ces coordonnées sont notées x_i ($i = 1, 2, 3$) et son vecteur vitesse est \vec{v} .

a) Ecrire, sous forme vectorielle, les équations du mouvement de Newton pour cette particule. Le hamiltonien décrivant ce mouvement est donné par

$$H(p_i, x_i) = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 (p_j - qA_j)(p_j - qA_j) + q\varphi ,$$

où $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$ et $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$.

b) Montrer que les équations de Hamilton sont équivalentes aux équations du mouvement de Newton.

c) résoudre les équations du mouvement pour un champ magnétique constant dirigé selon le troisième axe et un champ électrique constant dirigé selon le premier axe. A l'instant initial la particule est à l'origine et sa vitesse est \vec{v}_0 .

Exercice 2 :

On étudie classiquement le mouvement d'un électron de masse m et de charge $-e$ soumis à l'attraction électrostatique d'un noyau de charge $+Ze$.

1) Ecrire le potentiel $V(\vec{r})$ en coordonnées sphériques (r, θ, φ) . On posera $k = Ze^2/(4\pi\epsilon_0)$.

2) Ecrire le lagrangien du système en coordonnées sphériques.

3) Donner l'expression du hamiltonien et s'assurer qu'il est conservé. Que représente-t-il?

4) Trouver une autre constante du mouvement. Quelle est son interprétation? Cette constante peut être choisie égale à zéro. Pourquoi?

Montrer que ce choix est équivalent à prendre $\varphi(t) = \text{constante}, \forall t$. Avec ce choix, donner l'expression du nouveau hamiltonien.

5) Ecrire les équations de Hamilton et identifier une nouvelle constante du mouvement.

6) Montrer qu'un mouvement circulaire stable est possible. Donner le rayon, r_c , du cercle

en fonctions des donnée initiales r_0 et θ_0 . En déduire l'expression de la vitesse angulaire à communiquer à l'électron pour que r_c soit égal à r_0 .

502 P - Mécanique analytique - 2008/2009

Examen du 08/06/2009. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

Le lagrangien d'un système à deux degrés de liberté est donné par

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2} (x^2 + y^2) + \alpha xy \quad , \quad (1)$$

où ω_0 et α sont des constantes.

- a) Donner l'expression de l'hamiltonien de ce système.
- b) Trouver $x(t)$ et $y(t)$.

Exercice 2 :

Soit un pendule simple de masse m dans lequel la tige rigide est remplacée par un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide l . Les deux degrés de liberté sont l'angle θ que fait le ressort avec la verticale et la longueur du ressort r .

- 1) Ecrire le lagrangien du pendule et en déduire les équations du mouvement.
- 2) Est-ce-qu'un mouvement pour lequel la masse m décrit un arc de cercle est possible?
- 3) Expliquer, sans calcul, pourquoi le hamiltonien H du pendule satisfait $\frac{dH}{dt} = 0$.
- 4) Montrer que le moment cinétique de m par rapport à O n'est pas une quantité conservée.

Exercice 3 :

Soit la transformation donnée par:

$$\begin{aligned} q_1 &= q'_1 \cos \lambda + \frac{p'_2}{m\omega} \sin \lambda \quad , \quad q_2 = q'_2 \cos \lambda + \frac{p'_1}{m\omega} \sin \lambda \quad , \\ p_1 &= -m\omega q'_2 \sin \lambda + p'_1 \cos \lambda \quad , \quad p_2 = -m\omega q'_1 \sin \lambda + p'_2 \cos \lambda \quad . \end{aligned} \quad (2)$$

Si cette transformation est une transformation canonique, alors il existe une fonction $F_2(q_i, p'_i)$, $i = 1, 2$, tel que

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad , \quad q'_i = \frac{\partial F_2}{\partial p'_i} \quad . \quad (3)$$

- 1) Quel est l'intérêt des transformations canoniques?
- 2) Déterminer la fonction génératrice F_2 (m , ω et λ sont des constantes).
- 3) Trouver la nouvelle fonction d'Hamilton $H'(p'_i, q'_i)$ si

$$H(p_i, q_i) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2) \quad . \quad (4)$$

502 P - Mécanique analytique - 2008/2009

Examen du 16/12/2008. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

Déterminer le mouvement d'un système à deux degrés de liberté si sa fonction de Lagrange est

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2} (x^2 + y^2) + \alpha xy \quad , \quad (5)$$

où ω_0 et α sont des constantes.

Exercice 2 :

Un point matériel de masse m se déplace, sans frottement, sur la surface intérieure d'un cône dans le champ de la pesanteur. Le cône a un angle au sommet égale à 2α et est placé verticalement, le sommet en bas.

- 1) Ecrire la fonction de Lagrange de ce point.
- 2) Donner les expressions (et les interprétations physiques) de deux constantes du mouvement.
- 3) Montrer que l'une de ces deux constantes peut se mettre sous la forme $\frac{M}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \text{constante}$, où M et V_{eff} sont à déterminer.
- 4) Montrer, par un raisonnement graphique (solution graphique et sans trop de calcul), que les valeurs possibles de r sont nécessairement comprises entre deux valeurs r_1 et r_2 .

Exercice 3 :

Le hamiltonien, en coordonnées sphériques (r, θ, φ) , d'une particule de masse m est donnée par

$$H = \frac{1}{2m} \left(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2} + \frac{P_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} \quad , \quad (6)$$

où $a(r)$ et $b(\theta)$ sont deux fonctions données.

1) Ecrire le lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i)$ du système.

2) Expliquer pourquoi l'énergie totale E et le moment P_φ sont des constantes du mouvement.

3) Ecrire l'équation de Hamilton-Jacobi pour la fonction génératrice S (on suppose que S dépend explicitement du temps).

4) Cherchons des solutions à cette équation du type $S = -Et + P_\varphi\varphi + W_1(r) + W_2(\theta)$, où E est une constante. En déduire les équations différentielles satisfaites par $W_1(r)$ et $W_2(\theta)$ et expliciter les solutions.

502 P - Mécanique analytique - 2007/2008

Examen du 10/06/2008. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

Un point matériel de masse m se déplace, sans frottement, sur la surface intérieure d'une sphère de rayon R dans le champ de la pesanteur.

- 1) Ecrire la fonction de Lagrange de ce point.
- 2) Donner les expressions (et les interprétations physiques) de deux constantes du mouvement.
- 3) Montrer que l'une de ces deux constantes peut se mettre sous la forme $\frac{M}{2}\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) = \text{constante}$, où M et V_{eff} sont à déterminer.
- 4) L'équation de la question précédente peut être regardée comme une équation en $\alpha = \cos(\theta)$. Montrer, par un raisonnement graphique (solution graphique et sans trop de calcul), que les valeurs possibles de θ sont nécessairement comprises entre deux valeurs θ_1 et θ_2 .

Exercice 2 :

Etudions la dynamique hamiltonienne dans un référentiel tournant (par exemple lié à un manège) à une vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ autour de la direction \vec{k} . On suppose que les deux référentiels coïncident au temps $t = 0$. Les coordonnées dans le référentiel fixe sont $q_i = (x, y, z)$ et celles du référentiel mobile sont $q'_i = (X, Y, Z)$.

- 1) Montrer que les coordonnées q_i et q'_i sont reliées par

$$x = X \cos(\omega t) - Y \sin(\omega t) \quad , \quad y = X \sin(\omega t) + Y \cos(\omega t) \quad , \quad z = Z \quad . \quad (7)$$

- 2) Exprimer l'énergie cinétique $T(q'_i, \dot{q}'_i)$ d'un point matériel libre de masse m .
- 3) Si $V(q'_i)$ désigne le potentiel dans lequel est plongé le point matériel, donner l'expression du lagrangien $L(q'_i, \dot{q}'_i)$ du système.
- 4) En déduire le hamiltonien $H(p'_i, q'_i)$.

Le hamiltonien $H(p'_i, q'_i)$ est-il une constante du mouvement? Si oui, préciser si cette constante est l'énergie du système $E(p'_i, q'_i)$.

- 5) Calculer le crochet de Poisson $\{E(p'_i, q'_i), H(p'_i, q'_i)\}_{(q', p')}$. Conclure.

6) Ecrire les équations de Hamilton dans le référentiel tournant et identifier les différentes forces.

7) Résoudre les équations du mouvement pour le potentiel $V(q'_i) = m\omega^2 \left(X^2 + \frac{1}{2}Y^2 \right)$.

8) Montrer que les moments généralisés (p_X, p_Y, p_Z) dans le référentiel tournant et les moments généralisés (p_x, p_y, p_z) dans le référentiel fixe sont liés par

$$p_X = p_x \cos(\omega t) + p_y \sin(\omega t) \quad , \quad p_Y = -p_x \sin(\omega t) + p_y \cos(\omega t) \quad , \quad p_Z = p_z \quad . \quad (8)$$

502 P - Mécanique analytique - 2007/2008

Examen du 11/12/2007. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

Un point matériel de masse m se déplace, sans frottement, sur la surface intérieure d'une sphère de rayon R dans le champ de la pesanteur.

- 1) Ecrire la fonction de Lagrange de ce point.
- 2) Donner les expressions (et les interprétations physiques) de deux constantes du mouvement.
- 3) Montrer que l'une de ces deux constantes peut se mettre sous la forme $\frac{M}{2}\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) = \text{constante}$, où M et V_{eff} sont à déterminer.
- 4) L'équation de la question précédente peut être regardée comme une équation en $\alpha = \cos(\theta)$. Montrer, par un raisonnement graphique (solution graphique et sans trop de calcul), que les valeurs possibles de θ sont nécessairement comprises entre deux valeurs θ_1 et θ_2 .

Exercice 2 :

Etudions la dynamique hamiltonienne dans un référentiel tournant (par exemple lié à un manège) à une vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ autour de la direction \vec{k} . On suppose que les deux référentiels coïncident au temps $t = 0$. Les coordonnées dans le référentiel fixe sont $q_i = (x, y, z)$ et celles du référentiel mobile sont $q'_i = (X, Y, Z)$.

- 1) Montrer que les coordonnées q_i et q'_i sont reliées par

$$x = X \cos(\omega t) - Y \sin(\omega t) \quad , \quad y = X \sin(\omega t) + Y \cos(\omega t) \quad , \quad z = Z \quad . \quad (9)$$

- 2) Exprimer l'énergie cinétique $T(q'_i, \dot{q}'_i)$ d'un point matériel libre de masse m .
- 3) Si $V(q'_i)$ désigne le potentiel dans lequel est plongé le point matériel, donner l'expression du lagrangien $L(q'_i, \dot{q}'_i)$ du système.
- 4) En déduire le hamiltonien $H(p'_i, q'_i)$.

Le hamiltonien $H(p'_i, q'_i)$ est-il une constante du mouvement? Si oui, préciser si cette constante est l'énergie du système $E(p'_i, q'_i)$.

- 5) Calculer le crochet de Poisson $\{E(p'_i, q'_i), H(p'_i, q'_i)\}_{(q', p')}$. Conclure.

6) Ecrire les équations de Hamilton dans le référentiel tournant et identifier les différentes forces.

7) Résoudre les équations du mouvement pour le potentiel $V(q'_i) = m\omega^2 \left(X^2 + \frac{1}{2}Y^2 \right)$.

8) Montrer que les moments généralisés (p_X, p_Y, p_Z) dans le référentiel tournant et les moments généralisés (p_x, p_y, p_z) dans le référentiel fixe sont liés par

$$p_X = p_x \cos(\omega t) + p_y \sin(\omega t) \quad , \quad p_Y = -p_x \sin(\omega t) + p_y \cos(\omega t) \quad , \quad p_Z = p_z \quad . \quad (10)$$

502 P - Mécanique analytique - 2006/2007

Contrôle Continu du 15/11/2006. Durée: 1h30mn

Exercice 1 :

Le mouvement d'un système mécanique est décrit par les équations différentielles suivantes:

$$2\ddot{x} + \ddot{y} = -2x \quad \ddot{x} + \ddot{y} = -y$$

- a) Montrer que le système est un système hamiltonien.
- b) Déterminer les modes propres du mouvement et écrire la solution générale.

Exercice 2 :

Un point matériel M de masse m est soumis à une accélération centrale dirigée vers un point fixe O et proportionnelle à:

$$\frac{1}{r^2} \times e\left(\frac{k}{r}\right) ,$$

où r est la distance de M à l'origine O et k est une constante.

- 1) Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O et montrer que le mouvement de M est un mouvement plan. Le mouvement de M sera par la suite étudié dans ce plan. Quel est le système de coordonnées le plus adapté à ce mouvement?
- 2) Calculer le lagrangien correspondant à ce mouvement.
- 3) Ecrire les équations du mouvement dans le formalisme lagrangien.
- 4) Donner deux constantes du mouvement (et montrer quelles sont indépendantes du temps).
- 5) Montrer qu'une orbite circulaire, du point M , est possible et donner l'expression de son rayon. Démontrer que cette orbite n'est stable que si son rayon est supérieur à k .
- 6) Donner l'expression du hamiltonien correspondant à ce mouvement.
- 7) Ecrire les équations du mouvement dans le formalisme hamiltonien et comparer avec les résultats des questions 3 et 4.

502 P - Mécanique analytique - 2006/2007

Examen du 18/12/2006. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

Soit un pendule simple de masse m dans lequel la tige rigide est remplacée par un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide l . L'angle que fait le ressort avec la verticale est θ et r est la longueur du ressort.

- 1) Ecrire le lagrangien du pendule et en déduire les équations du mouvement.
- 2) Est-ce qu'un mouvement pour lequel la masse m décrit un arc de cercle est possible?
- 3) Expliquer, sans calcul, pourquoi le hamiltonien H du pendule satisfait $\frac{dH}{dt} = 0$.
- 4) Montrer que le moment cinétique de m par rapport à O n'est pas une quantité conservée.

Exercice 2 :

Le lagrangien d'un système est donnée par

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - mgq_2 + \lambda(q_1 \operatorname{tg} \alpha - q_2) \quad , \quad (11)$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange, $g = 9,81\text{m/s}^2$ et α et m sont des constantes.

- 1) Quelle est la trajectoire de ce système? Quel système physique est représenté par ce lagrangien?
- 2) Résoudre les équations du mouvement si $\dot{q}_1(0) = v_0 \cos \alpha$, $\dot{q}_2(0) = v_0 \sin \alpha$ et $q_1(0) =$

$q_2(0) = 0$. Déterminer λ .

3) Que représentent les deux quantités $\lambda \operatorname{tg} \alpha$ et $-\lambda$?

Exercice 3 :

Soit M un point de l'espace des phases d'un système à un degré de liberté. Les coordonnées de ce point sont (q, p) . Le point M' est le point de l'espace des phases de coordonnées (q', p') obtenu à partir de M par une rotation d'un angle α .

On voudrait montrer que cette rotation définit une transformation canonique:

1) Montrer que les coordonnées du point M' sont données par

$$q' = q \cos \alpha - p \sin \alpha \quad , \quad p' = q \sin \alpha + p \cos \alpha \quad . \quad (12)$$

2) On cherche une fonction génératrice du type $F_1(q, q')$ satisfaisant

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad , \quad p' = -\frac{\partial F_1}{\partial q'} \quad (13)$$

Déterminer $F_1(q, q')$.

3) Soient $X(q, p)$ et $Y(q, p)$ deux grandeurs dynamiques. Montrer que le crochet de Poisson de X et Y satisfait

$$[X, Y]_{q,p} = \frac{\partial X}{\partial q'} \frac{\partial Y}{\partial p'} - \frac{\partial X}{\partial p'} \frac{\partial Y}{\partial q'} \quad . \quad (14)$$

Conclure.

502 P - Mécanique analytique - 2006/2007

Examen du 22/06/2007. Durée: 2h00mn

Exercice 1 :

Un point matériel de masse m se déplace sans frottement sous l'action de son poids sur un support dont l'allure est régie par l'équation $x^2 + y^2 = \mu z$, où μ est paramètre fixe ayant la dimension d'une longueur.

- 1) Quel est le système de coordonnées le plus adapté à ce problème?
- 2) Donner le lagrangien de ce mouvement.
- 3) Ecrire les équations de Euler-Lagrange en se servant d'un multiplicateur de Lagrange λ .
- 4) Donner l'expression de la force de réaction du support.
- 5) Etude d'un cas particulier: le mouvement dans le plan $z = h$. Montrer que dans ce cas, un mouvement circulaire stable est possible. Déterminer alors les conditions initiales pour obtenir ce mouvement et calculer λ .

Exercice 2 :

On donne la fonction de Lagrange suivante:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - eg\dot{\varphi} \cos \theta \quad , \quad (15)$$

où g et e sont des constantes.

- 1) Que représente ce lagrangien sans le dernier terme?
- 2) Ecrire les équations du mouvement et identifier les forces agissant sur m .
- 3) Montrer que ce lagrangien décrit le mouvement d'une particule de charge e dans le champ magnétique $\vec{B} = g \frac{\vec{r}}{r^3}$, où \vec{r} est le vecteur position de la particule.
- 4) Donner l'expression de p_φ , le moment conjugué de φ , et montrer que p_φ reste constant au cours du temps.
- 5) Trouver une autre constante du mouvement.

Exercice 3 :

Soit la transformation donnée par:

$$\begin{aligned} q_1 &= q'_1 \cos \lambda + \frac{p'_2}{m\omega} \sin \lambda \quad , \quad q_2 = q'_2 \cos \lambda + \frac{p'_1}{m\omega} \sin \lambda \quad , \\ p_1 &= -m\omega q'_2 \sin \lambda + p'_1 \cos \lambda \quad , \quad p_2 = -m\omega q'_1 \sin \lambda + p'_2 \cos \lambda \quad . \end{aligned} \quad (16)$$

Si cette transformation est une transformation canonique, alors il existe une fonction $F_2(q_i, p'_i)$, $i = 1, 2$, tel que

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad , \quad q'_i = \frac{\partial F_2}{\partial p'_i} \quad . \quad (17)$$

- 1) Déterminer la fonction génératrice F_2 (m , ω et λ sont des constantes).
- 2) Trouver la nouvelle fonction d'Hamilton $H'(p'_i, q'_i)$ si

$$H(p_i, q_i) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2) \quad . \quad (18)$$