Université de Tours "François Rabelais"
Faculté de Sciences et Techniques
Licence de Physique 2007–2008
Simulation, Modélisation, Outils Informatiques

L'équation d'Ondes et ses variations

Le but de cet exercice est la solution numérique de l'équation

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + W(\Phi)$$

sur l'intervalle $0 < z < L$. On définit la "vitesse", $\Psi(z,t) \equiv \partial\Phi(z,t)/\partial t$. Pour définir le problème on impose les conditions initiales, $\Phi(z,0) = \exp(-(z-(L/2))^2/(2\sigma_0^2))$ et $\Psi(z,0) = 0$ et les conditions aux bords, $\Phi(0,t) = 0$, $\Phi(L,t) = 0$, $\Psi(0,t) = 0$ et $\Psi(L,t) = 0$. La fonction $W(\Phi) \equiv \partial V(\Phi)/\Phi$, où $V(\Phi) = \alpha^2\Phi^2 \Rightarrow W(\Phi) = \alpha^2\Phi$.

Pour $\alpha^2 = 0$ la relation de dispersion est $\omega = vk$ et la vitesse de groupe est $d\omega/dk = v$ indépendante de k–il n'y a pas de dispersion et le paquet d'ondes gaussien initial se propage sans déformation.

Pour $\alpha^2 \neq 0$ la relation de dispersion devient

$$\omega = \sqrt{v^2k^2 - \alpha^2}$$

et l'on note que, pour $k < \alpha/v$, ω devient imaginaire–ces modes ne se propagent pas, alors la gaussienne, qui en est une superposition, va se déformer. Le but de l'exercice est de mettre en évidence ce phénomène.

1. Afficher $\Phi(z,t)$ pour le cas $\alpha^2 = 0$ et contrôler l'absence de dispersion.
2. Afficher $\Phi(z,t)$ pour $\alpha^2 \neq 0$ et discuter la manifestation de la dispersion.
3. **OPTIONNEL** : Etudier le cas bidimensionnel,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = v^2\nabla^2\Phi + W(\Phi)$$

et discuter similarités et différences.