L'équation d'ondes avec conditions aux limites Robin

Stam Nicolis [1]
Institut Denis Poisson, Université de Tours, Université d'Orléans, CNRS (UMR7013)
Parc Grandmont, Tours 37200, France

Résumé

On étudie les propriétés de l'équations d'ondes, lorsque l'on impose des conditions aux limites Robin. On trouve que pour que la solution reste bornée, il faut inclure des termes de dispersion et que leurs coefficients soient à une relation très concrète avec les coefficients des conditions Robin.

1 Introduction

intro

On cherche à résoudre l'équation d'ondes linéaire,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \tag{1}$$

ondes

pour $x \in [0, L]$. On doit imposer des conditions initiales et des conditions aux limites.

— *Conditions initiales* :

$$\phi(x,0) = F(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{2}$$

initcond

— *Conditions aux limites* :

$$\phi(0,t) + \gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(L,t) + \gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}(L,t) = 0 \tag{3}$$

Robinbc

où γ est une constante, qui a, nécessairement, les dimensions d'une longueur. Les conditions (3) s'appellent les conditions aux limites (homogènes) de Robin.

Il est utile de reformuler le problème en employant des expression sans dimensions–ainsi l'on pourra résoudre tout problème de cette classe.

On pose, ainsi,

$$u \equiv \frac{x}{L} \quad , \quad \tau \equiv t\frac{v}{L} \quad , \quad \Gamma \equiv \frac{\gamma}{L} \tag{4}$$

dimanaly

Les quantités, u, τ et Γ sont sans dimensions.

Le problème prend, alors, la forme suivante :

1. E-Mail : stam.nicolis@idpoisson.fr ; stam.nicolis@lmpt.univ-tours.fr

Solondes **Théorème 1.** *La solution de l'équation*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \tag{5}$$
ondes1

avec conditions initiales

$$\phi(u,0) = F(u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \tau}(u,0) = 0 \tag{6}$$
initcond

et conditions aux limites

$$\phi(0,\tau) + \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial u}(0,\tau) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(1,\tau) + \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial u}(1,t) = 0 \tag{7}$$
Robinbc1

existe et elle est unique. Mais elle diverge exponentiellement vite, dans le temps, avec taux $|\Gamma|$.

L'idée est d'exprimer $\phi(u,\tau)$ comme combinaison linéaire des fonctions propres de l'opérateur $-d^2/du^2$, qui satisfont les mêmes conditions aux limites.

On doit, alors, trouver fonctions propres et valeurs propres de cet opérateur.

2 Le problème spectral pour $-d^2/du^2$ avec coditions aux limites Robin

La solution générale de l'équation

$$-\frac{d^2}{du^2} f = \lambda f \Leftrightarrow \frac{d^2}{du^2} f + \lambda f = 0 \tag{8}$$
Robinspe

pour $u \in [0,1]$ est donnée par l'expression

$$f(u) = Ae^{\mathrm{i}u\sqrt{\lambda}} + Be^{-\mathrm{i}u\sqrt{\lambda}} \tag{9}$$
solspec

On impose, maintenant, les conditions aux limites

$$f(0) + \Gamma f'(0) = 0 = f(1) + \Gamma f'(1) \tag{10}$$
Robinbc2

et l'on obtient le système d'équations suivantes pour les coefficients A et B :

$$\begin{array}{c} A\left(1+\mathrm{i}\Gamma\sqrt{\lambda}\right) + B\left(1-\mathrm{i}\Gamma\sqrt{\lambda}\right) = 0 \\ A\left(1+\mathrm{i}\Gamma\sqrt{\lambda}\right)e^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}} + B\left(1-\mathrm{i}\Gamma\sqrt{\lambda}\right)e^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}} = 0 \end{array} \tag{11}$$
ABeqs

C'est un système homogène, par conséquent, la condition pour qu'il possède un nombre infini de solutions est

$$\left| \begin{array}{cc} 1+\mathrm{i}\Gamma\sqrt{\lambda} & 1-\mathrm{i}\Gamma\sqrt{\lambda} \\ \left(1+\mathrm{i}\Gamma\sqrt{\lambda}\right)e^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}} & \left(1-\mathrm{i}\Gamma\sqrt{\lambda}\right)e^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}} \end{array} \right| = \left(1+\Gamma^2\lambda\right)\left(e^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}} - e^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \tag{12}$$
eigenval

qui est satisfaite, lorsque $\lambda = -1/\Gamma^2$ ou $\lambda_n = n^2\pi^2$, avec n entier. On ne sait pas, encore, si $n = 0$ est une valeur possible.

On note que l'ensemble de ces valeurs est discret, comme l'on pouvait s'attendre pour un opérateur défini sur un espace compact.

Les fonctions propres correspondantes peuvent être déterminées en imposant les conditions (11) ABeqs, pour les valeurs de λ approrpiées ; bien entendu, les deux équations n'étant pas, alors, indépendantes, il suffit d'en imposer une.

Ainsi l'on trouve, pour $\lambda = -1/\Gamma^2$, que

$$A\left(1 + \mathrm{i}\Gamma\sqrt{-\frac{1}{\Gamma^2}}\right) + B\left(1 - \mathrm{i}\Gamma\sqrt{-\frac{1}{\Gamma^2}}\right) = 0 \tag{13}$$

negevalu

ce qui implique que la fonction propre correspondante est donnée par l'expression

$$f_*(u) = A_* e^{-u/|\Gamma|} \tag{14}$$

negeigen

où A_* est un coefficient qui sera déterminé en imposant la normalisation de la fonction propre.

Pour $\lambda = n^2\pi^2$, on trouve que

$$A\left(1 + \mathrm{i}\Gamma n\pi\right) + B\left(1 - \mathrm{i}\Gamma n\pi\right) = 0 \Leftrightarrow A = -B\frac{1 - \mathrm{i}\Gamma n\pi}{1 + \mathrm{i}\Gamma n\pi} = -B\left(\frac{1 - \Gamma^2 n^2\pi^2}{1 + \Gamma^2 n^2\pi^2} - \mathrm{i}\frac{2\Gamma n\pi}{1 + \Gamma^2 n^2\pi^2}\right) = -Be^{-\mathrm{i}\theta_n} \tag{15}$$

posevale

avec $\tan(\theta_n/2) = \Gamma n\pi$.

Par conséquent, la fonction propre correspondante est donnée par l'expression

$$f_n(u) = -B\left(e^{\mathrm{i}(-\theta_n + n\pi u)} - e^{-\mathrm{i}n\pi u}\right) = -Be^{-\mathrm{i}\frac{\theta_n}{2}}\left(e^{\mathrm{i}\left(n\pi u - \frac{\theta_n}{2}\right)} - e^{-\mathrm{i}\left(n\pi u - \frac{\theta_n}{2}\right)}\right) = A_n \sin\left(n\pi u - \frac{\theta_n}{2}\right) \tag{16}$$

poseigen

où A_n est le coefficient de normalisation.

L'on note que, pour $n = 0$, $f_0(u) \equiv 0$, par conséquent, il n'y a pas de valeur propre 0.

exonormneg **Exercice 1.** *Le coeffcient A_* est déterminé par la condition*

$$\int_0^1 du\ \left[f_*(u)\right]^2 = 1. \tag{17}$$

Astar

Trouver son expression.

exonormpos **Exercice 2.** *Les coefficients A_n, $n = 1, 2, \ldots$ sont déterminés, chacun, par la condition*

$$\int_0^1 du\ \left[f_n(u)\right]^2 = 1 \tag{18}$$

An

Trouver l'expression pour A_n, comme fonction de n et θ_n.

Exercice 3. *Montrer que les fonctions, $f_*(u)$ et $f_n(u)$, avec les préfacteurs calculés lors des exercices précédents, sont orthogonales :*

$$\begin{aligned}\int_0^1 du\, f_*(u) f_n(u) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}\\ \int_0^1 du\, f_n(u) f_m(u) = \delta_{mn}\end{aligned} \tag{19}$$

`orthoeig`

Ayant résolu le problème spectral, on peut, maintenant, résoudre l'équation d'ondes.

3 La solution de l'équation d'ondes avec conditions aux limites Robin : Démonstration du Théorème 1

`DemoThm`

La démonstration est constructive. Elle a, cependant, deux lacuunes : (a) On n'a pas démontré que l'ensemble $\{f_*(u), f_n(u)\}$ est une base ; (b) on ne vas pas démontrer que la série, construite à partir des $f_n(u)$, converge.

On exprime la fonction, $\phi(u,\tau)$ comme comibinaison linéaire de la fonction $f_*(u)$ et des fonctions $f_n(u)$:

$$\phi(u,\tau) = c_*(\tau) f_*(u) + \sum_{n=1}^{N} c_n(\tau) f_n(\tau) \tag{20}$$

`solserie`

Pour N fini l'expression est, certainement, bien définie. On va montrer que l'on peut calculer explicitement les coefficients $c_*(\tau)$ et $c_n(\tau)$, à partir des conditions initiales.

On remplace l'expression pour $\phi(u,\tau)$ dans l'éq. (5). Le membre de gauche devient :

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\phi(u,\tau) = \frac{d^2 c_*(\tau)}{d\tau^2} f_*(u) + \sum_{n=1}^{N} \frac{d^2 c_n(\tau)}{dt^2} f_n(u) \tag{21}$$

`LHS1`

Le membre de droite à son tour, prend la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\phi(u,\tau) = c_*(\tau)\frac{d^2}{du^2} f_*(u) + \sum_{n=1}^{N} c_n(\tau)\frac{d^2}{du^2} f_n(u) =\\ c_*\frac{1}{\Gamma^2} f_*(u) - \sum_{n=1}^{N} n^2\pi^2 c_n(\tau) f_n(u)\end{aligned} \tag{22}$$

`RHS1`

Les membres de gauche de ces équations étant égaux, les membres de droite devront l'être, aussi :

$$\frac{d^2 c_*(\tau)}{d\tau^2} f_*(u) + \sum_{n=1}^{N} \frac{d^2 c_n(\tau)}{dt^2} f_n(u) = c_*\frac{1}{\Gamma^2} f_*(u) - \sum_{n=1}^{N} n^2\pi^2 c_n(\tau) f_n(u) \tag{23}$$

`LHS1=RHS`

On exploite, maintenant, les relations d'orthogonalité (19) pour déduire un système d'équations différentielles ordinaires pour les coefficients, $c_*(\tau)$ et $c_n(\tau)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\tau^2}c_*(\tau) &= \frac{1}{\Gamma^2}c_*(\tau)\\
\frac{d^2}{d\tau^2}c_n &= -n^2\pi^2 c_n(\tau)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Les solutions générales de ces équations sont données par les expressions :

$$
\begin{aligned}
c_*(\tau) &= C_+ e^{\tau/|\Gamma|} + C_- e^{-\tau/|\Gamma|}\\
c_n(\tau) &= K_n\cos(n\pi\tau) + L_n\sin(n\pi\tau)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Les coefficients, $C_\pm$, K_n et L_n sont déterminés par les conditions initiales :

$$
\begin{aligned}
\phi(u,0) = f(u) &= \left(C_+ + C_-\right) f_*(u) + \sum_{n=1}^{N} K_n f_n(u)\\
\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\phi(u,0) &= \frac{C_+ - C_-}{\Gamma} f_*(u) + \sum_{n=1}^{N} n\pi L_n f_n(u)
\end{aligned}
\tag{26}
$$

En exploitant l'orthogonalité des fonctions $f_*(u)$ et $f_n(u)$ on déduit un système d'équations pour les coefficients, qui, dans le cas actuel (6) est très simple :

$$
\begin{aligned}
C_+ &= C_- & L_n &= 0\\
C_+ &= \frac{1}{2}\int_0^1 du\, F(u) f_*(u) & K_n &= \int_0^1 du F(u) f_n(u)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

et l'on déduit l'expression suivante pour $\phi(u,\tau)$:

$$
\phi(u,\tau) = 2C_+\cosh\left(\frac{\tau}{|\Gamma|}\right) f_*(u) + \sum_{n=1}^{N} K_n\cos n\pi\tau f_n(u)
\tag{28}
$$

qui décrit une fonction qui diverge exponentiellement avec le temps, puisque C_+ ne peut s'annuler, génériquement. Ceci est le signe d'une description incomplète. Il faut bien comprendre que la divergence exponentielle avec le temps est un sujet totalement distinct de la convergence–ou non–de la série sur $K_n\cos n\pi\tau f_n(u)$.

Dans la section suivante on cherchera à décrire une manière de compléter la description.

4 Les effets de la dispersion

Une manière de généraliser l'équation d'ondes, de façon à ce que celle-ci ait des solutions bornées en présence des conditions aux limites Robin est la suivante :

$$
\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} + \beta\phi
\tag{29}
$$

On va montrer qu'il existe une valeur spéciale pour β, pour laquelle le terme en $\cosh(\tau/|\Gamma|)$ a un comportement totalement différent.

La démonstration est directe : on remplace dans l'équation (29) l'expression (20). La seule nouveauté est l'apparition de termes supplémentaires dans les équations pour les coefficients :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2}c_* &= \left(\frac{1}{\Gamma^2}+\beta\right)c_* \\ \frac{d^2}{d\tau^2}c_n &= \left(-n^2\pi^2+\beta\right)c_n \end{aligned} \tag{30}$$

ODEcnew

On se rend compte que, si $\beta \leq -1/\Gamma^2$, alors les solutions de toutes les deux équations sont bornées–elle décrivent une dépendance périodique dans le temps et, par conséquent, cette condition est nécessaire pour que $\phi(u,\tau)$ soit bornée. (Elle n'est pas suffisante, car elle n'assure pas la convergence de la série sur les modes de valeurs propres positives.)

Si l'on pose $\Omega^2 \equiv -\beta-(1/\Gamma^2)$ et $\omega_n^2 \equiv n^2\pi^2-\beta$, alors les solutions générales des équations (30) sont

$$\begin{aligned} c_*(\tau) &= C_+\cos\Omega\tau + C_-\sin\Omega\tau \\ c_n(\tau) &= K_n\cos\omega_n\tau + L_n\sin\omega_n\tau \end{aligned} \tag{31}$$

solODEcn

On se rend compte que le traitement est tout à fait semblable au cas du spectre infini avant : On trouve $C_- = 0 = L_n$ et

$$\begin{aligned} C_+ &= \int_0^1 du\, F(u)f_*(u) \\ K_n &= \int_0^1 du\, F(u)f_n(u) \end{aligned} \tag{32}$$

CplusKn

et l'expression suivante pour la solution de l'équation d'ondes

$$\phi(u,\tau) = C_+\cos(\Omega\tau)f_*(u) + \sum_{n=1}^{N} K_n\cos(\omega_n\tau)f_n(u) \tag{33}$$

solnew

On note que cette expression décrit, également, le cas spécial $\Omega = 0$, lorsque $\beta = -1/\Gamma^2$ et la contribution de la fonction propre $f_*(u)$ décrit un fond, indépendant du temps.

C'est, cependant, utile de comprendre que font les conditions aux limites–et celles de Robin en particulier. Pour ceci, il faut étudier les quantités conservées grâce aux symétries globales, comme la translation dans le temps-ce qui est l'énergie totale.

5 L'énergie totale et les conditions aux limites

energybc

Il y a plusieurs façons de montrer que l'éq. (29) est invariante sous la transformation $t \to t+\delta t \equiv t'$; la plus simple est par calcul direct. Il est moins trivial de trouver la quantité conservée, c.à.d. l'énergie totale.

La difficulté principale est comment tenir compte des conditions aux limites.

La manière “standarde” est de montrer que la quantité

$$E = \int_0^1 du \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)^2 - \frac{\beta}{2}\phi^2 \right\} \tag{34}$$

energy

est conservée, si ϕ est solution de l’éq. (29) dispersionPDE à des contributions des bords près.

La démonstration est le résultat du calcul de $dE/d\tau$:

$$\frac{dE}{d\tau} = \int_0^1 du \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial\tau}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau\partial u} - \beta\phi\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right\} =$$
$$\int_0^1 du \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} - \beta\phi\right) + \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau\partial u} \right\} = \int_0^1 du \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial\tau}\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} + \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau\partial u} \right\} = \int_0^1 du \frac{\partial}{\partial u}\left\{ \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right\} \tag{35}$$

dE/dt

On note que le terme, auquel on a abouti n’est pas identiquement nul ; c’est l’intégrale d’une dérivée totale. En identifiant l’intégrande, qui définit E, comme une densité d’énergie, ρ, on peut identifier l’argument de la dérivée totale comme une densité de courant, J et écrire l’équation précédente sous la forme

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\frac{\partial\phi}{\partial u}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \mathrm{div}\cdot\mathbf{J} = 0 \tag{36}$$

currentc

Ici, bien sûr, $\mathbf{J}$ ne possède qu’une composante. Ce courant $\mathbf{J}$ n’est autre que le pendant du vecteur de Poynting pour le champ électromagnétique.

Le terme de bord peut être explicitement calculé, en terme des conditions aux limites :

$$\int_0^1 du \frac{\partial}{\partial u}\left\{ \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right\} = \left[\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\frac{\partial\phi}{\partial u}\right](1,\tau) - \left[\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\frac{\partial\phi}{\partial u}\right](0,\tau) \tag{37}$$

boundary

et l’on remarque qu’il ne s’annule identiquement que pour les conditions aux limites Neumann. Pour les conditions aux limites Dirichlet et Robin il y a un courant à travers les bords.

Par le traitement actuel on voudrait étudier quantitativement le comportement de ce courant, comme fonction du temps.

courant **Exercice 4.** *Tracer*

$$J_{\mathrm{bord}}(\tau) = -\left[\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\frac{\partial\phi}{\partial u}\right](1,\tau) + \left[\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\frac{\partial\phi}{\partial u}\right](0,\tau)$$

comme fonction du temps, pour différentes valeurs de β et de Γ, en utilisant l’expression (33) solnew pour $\phi(u,\tau)$.

Indication *: Employer les conditions aux limites Robin pour simplifier $J_{\mathrm{bord}}(\tau)$ et montrer qu’il est donné par l’expression*

$$J_{\mathrm{bord}}^{\mathrm{Robin}} = \frac{1}{\Gamma}\left(\phi(1,\tau)\frac{\partial\phi}{\partial\tau}(1,\tau) - \phi(0,\tau)\frac{\partial\phi}{\partial\tau}(0,\tau)\right) = \frac{1}{2\Gamma}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\phi(1,\tau)^2 - \phi(0,\tau)^2\right) \tag{38}$$

JbordRob

Dans les exercices suivants on cherche à mieux comprendre ce que cette expression implique.

`courantneg` **Exercice 5.** *Commencer avec une condition initiale, qui correspondrait à la fonction propre* $f_*(u)$*, c.à.d.* $\phi(u,0) = f_*(u)$*,* $\partial\phi(u,0)/\partial\tau = 0$*. Quelle est l'expression pour* $J_{\mathrm{bord}}(\tau)$ *? Comment dépend-elle des paramètres* β *et* Γ *?*

`courantpos` **Exercice 6.** *Même question, pour le cas où* $\phi(u,0) = f_n(u)$ *et* $\partial\phi(u,0)/\partial\tau = 0$*.*

`2fpropres` **Exercice 7.** *Même question, pour le cas où* $C_+ \neq 0$ *et un seul coefficient* $K_{n_0} \neq 0$ *; ou* $C_+ = 0$ *et deux coefficients,* K_{n_1} *et* $K_{n_2} \neq 0$*.*