

INFORMATIQUE ET MÉTHODES NUMÉRIQUES
MASTER 1 DE PHYSIQUE
UNIVERSITÉ DE TOURS
2021–2022

Compte Rendu sur l'équation d'ondes avec conditions aux limites Robin

Stam Nicolis¹

Résumé

On étudie les propriétés de l'équations d'ondes, lorsque l'on impose des conditions aux limites Robin. On trouve que pour que la solution reste bornée, il faut inclure des termes de dispersion et que leurs coefficients soient à une relation très concrète avec les coefficients des conditions Robin.

On calcule le flux d'énergie à travers les bords, en fonction du paramètre, qui permet l'interpolation entre conditions aux limites Dirichlet et conditions aux limites Neumann, les deux cas limites des conditions aux limites Robin.

1. E-Mail : stam.nicolis@idpoisson.fr ; stam.nicolis@lmpt.univ-tours.fr

Table des matières

1	Partie théorique	1
1.1	Introduction	1
1.2	Le problème spectral pour $-d^2/du^2$ avec coditions aux limites Robin	2
1.3	La solution de l'équation d'ondes avec conditions aux limites Robin : Démonstration du Théorème II	5
1.4	Les effets de la dispersion	6
1.5	L'énergie totale et les conditions aux limites	7
2	Partie informatique	9
2.1	Tests du code	9

1 Partie théorique

1.1 Introduction

On cherche à résoudre l'équation d'ondes linéaire,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (1) \quad \text{ondes}$$

pour $x \in [0, L]$. On doit imposer des conditions initiales et des conditions aux limites.

— *Conditions initiales* :

$$\phi(x, 0) = F(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (2) \quad \text{initcond}$$

— *Conditions aux limites* :

$$\phi(0, t) + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(L, t) + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (3) \quad \text{Robinbc}$$

où γ est une constante, qui a, nécessairement, les dimensions d'une longueur. Les conditions (3) s'appellent les conditions aux limites (homogènes) de Robin.

Il est utile de reformuler le problème en employant des expression sans dimensions—ainsi l'on pourra résoudre tout problème de cette classe.

On pose, ainsi,

$$u \equiv \frac{x}{L} \quad , \quad \tau \equiv t \frac{v}{L} \quad , \quad \Gamma \equiv \frac{\gamma}{L} \quad (4) \quad \text{dimanaly}$$

Les quantités, u , τ et Γ sont sans dimensions.

Le problème prend, alors, la forme suivante :

Thorme 1. *La solution de l'équation*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \quad (5) \quad \text{ondes1}$$

avec conditions initiales

$$\phi(u, 0) = F(u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \tau}(u, 0) = 0 \quad (6) \quad \boxed{\text{initcond}}$$

et conditions aux limites

$$\phi(0, \tau) + \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial u}(0, \tau) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(1, \tau) + \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial u}(1, \tau) = 0 \quad (7) \quad \boxed{\text{Robinbc1}}$$

existe et elle est unique. Mais elle diverge exponentiellement vite, dans le temps, avec taux $|\Gamma|$.

L'idée est d'exprimer $\phi(u, \tau)$ comme combinaison linéaire des fonctions propres de l'opérateur $-d^2/du^2$, qui satisfont les mêmes conditions aux limites.

On doit, alors, trouver fonctions propres et valeurs propres de cet opérateur.

1.2 Le problème spectral pour $-d^2/du^2$ avec conditions aux limites Robin

La solution générale de l'équation

$$-\frac{d^2}{du^2}f = \lambda f \Leftrightarrow \frac{d^2}{du^2}f + \lambda f = 0 \quad (8) \quad \boxed{\text{Robinspec}}$$

pour $u \in [0, 1]$ est donnée par l'expression

$$f(u) = Ae^{iu\sqrt{\lambda}} + Be^{-iu\sqrt{\lambda}} \quad (9) \quad \boxed{\text{solspec}}$$

On impose, maintenant, les conditions aux limites

$$f(0) + \Gamma f'(0) = 0 = f(1) + \Gamma f'(1) \quad (10) \quad \boxed{\text{Robinbc2}}$$

et l'on obtient le système d'équations suivantes pour les coefficients A et B :

$$\begin{aligned} A \left(1 + i\Gamma\sqrt{\lambda} \right) + B \left(1 - i\Gamma\sqrt{\lambda} \right) &= 0 \\ A \left(1 + i\Gamma\sqrt{\lambda} \right) e^{i\sqrt{\lambda}} + B \left(1 - i\Gamma\sqrt{\lambda} \right) e^{-i\sqrt{\lambda}} &= 0 \end{aligned} \quad (11) \quad \boxed{\text{ABeqs}}$$

C'est un système homogène, par conséquent, la condition pour qu'il possède un nombre infini de solutions est

$$\begin{vmatrix} 1 + i\Gamma\sqrt{\lambda} & 1 - i\Gamma\sqrt{\lambda} \\ \left(1 + i\Gamma\sqrt{\lambda} \right) e^{i\sqrt{\lambda}} & \left(1 - i\Gamma\sqrt{\lambda} \right) e^{-i\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = (1 + \Gamma^2\lambda) \left(e^{i\sqrt{\lambda}} - e^{-i\sqrt{\lambda}} \right) = 0 \quad (12) \quad \boxed{\text{eigenval}}$$

qui est satisfaite, lorsque $\lambda = -1/\Gamma^2$ ou $\lambda_n = n^2\pi^2$, avec n entier. On ne sait pas, encore, si $n = 0$ est une valeur possible.

On note que l'ensemble de ces valeurs est discret, comme l'on pouvait s'attendre pour un opérateur défini sur un espace compact.

Les fonctions propres correspondantes peuvent être déterminées en imposant les conditions (II), pour les valeurs de λ appropriées; bien entendu, les deux équations n'étant pas, alors, indépendantes, il suffit d'en imposer une.

Ainsi l'on trouve, pour $\lambda = -1/\Gamma^2$, que

$$A \left(1 + i\Gamma \sqrt{-\frac{1}{\Gamma^2}} \right) + B \left(1 - i\Gamma \sqrt{-\frac{1}{\Gamma^2}} \right) = 0 \quad (13) \quad \boxed{\text{negevalu}}$$

ce qui implique que la fonction propre correspondante est donnée par l'expression

$$f_*(u) = A_* e^{-u/|\Gamma|} \quad (14) \quad \boxed{\text{negeigen}}$$

où A_* est un coefficient qui sera déterminé en imposant la normalisation de la fonction propre.

Pour $\lambda = n^2\pi^2$, on trouve que

$$A(1 + i\Gamma n\pi) + B(1 - i\Gamma n\pi) = 0 \Leftrightarrow A = -B \frac{1 - i\Gamma n\pi}{1 + i\Gamma n\pi} = -B \left(\frac{1 - \Gamma^2 n^2 \pi^2}{1 + \Gamma^2 n^2 \pi^2} - i \frac{2\Gamma n\pi}{1 + \Gamma^2 n^2 \pi^2} \right) = -B e^{-i\theta_n} \quad (15) \quad \boxed{\text{posevale}}$$

avec $\tan(\theta_n/2) = \Gamma n\pi$.

Par conséquent, la fonction propre correspondante est donnée par l'expression

$$f_n(u) = -B \left(e^{i(-\theta_n + n\pi u)} - e^{-in\pi u} \right) = -B e^{-i\frac{\theta_n}{2}} \left(e^{i(n\pi u - \frac{\theta_n}{2})} - e^{-i(n\pi u - \frac{\theta_n}{2})} \right) = A_n \sin \left(n\pi u - \frac{\theta_n}{2} \right) \quad (16) \quad \boxed{\text{poseigen}}$$

où A_n est le coefficient de normalisation.

L'on note que, pour $n = 0$, $f_0(u) \equiv 0$, par conséquent, il n'y a pas de valeur propre 0.

exonormneg

Exercice 1. Le coefficient A_* est déterminé par la condition

$$\int_0^1 du [f_*(u)]^2 = 1. \quad (17) \quad \boxed{\text{Astar}}$$

Trouver son expression.

Solution : L'éq. (17) est équivalente à l'expression

$$A_*^2 \int_0^1 du e^{-2u/|\Gamma|} = 1 \Leftrightarrow A_* = \sqrt{\frac{2}{|\Gamma|(1 - e^{-2/|\Gamma|})}} \quad (18) \quad \boxed{\text{Astarsol}}$$

exonormpos

Exercice 2. Les coefficients A_n , $n = 1, 2, \dots$ sont déterminés, chacun, par la condition

$$\int_0^1 du [f_n(u)]^2 = 1 \quad (19) \quad \boxed{\text{An}}$$

Trouver l'expression pour A_n , comme fonction de n et θ_n .

Solution : L'éq. (19) est équivalente à l'expression

$$\begin{aligned} A_n^2 \int_0^1 du \sin^2 \left(n\pi u - \frac{\theta_n}{2} \right) &= A_n^2 \int_0^1 du \frac{1}{2} (1 - \cos(2n\pi u - \theta_n)) \\ \frac{A_n^2}{2} - \frac{A_n^2}{2} \int_0^1 du \cos(2n\pi u - \theta_n) &= \frac{A_n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2\pi n} \sin(2n\pi u - \theta_n) \Big|_0^1 \right) = \\ \frac{A_n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2\pi n} (\sin(2\pi n - \theta_n) - \sin(-\theta_n)) \right) &= \frac{A_n^2}{2} = 1 \end{aligned} \quad (20) \quad \text{Ansol}$$

puisque la fonction sinus est périodique avec période 2π . Par conséquent on a que

$$\frac{A_n^2}{2} = 1 \Leftrightarrow A_n = \sqrt{2} \quad (21) \quad \text{Ansol1}$$

Exercice 3. Montrer que les fonctions, $f_*(u)$ et $f_n(u)$, avec les préfacteurs calculés lors des exercices précédents, sont orthogonales :

$$\begin{aligned} \int_0^1 du f_*(u) f_n(u) &= 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \int_0^1 du f_n(u) f_m(u) &= \delta_{mn} \end{aligned} \quad (22) \quad \text{ortho eig}$$

Solution : La démonstration suit par calcul direct :

1. : L'orthogonalité entre $f_*(u)$ et $f_n(u)$: L'idée est de remplacer le sinus par la différence de deux exponentielles :

$$\begin{aligned} \int_0^1 du f_*(u) f_n(u) &= A_* A_n \int_0^1 du e^{-u/|\Gamma|} \sin \left(n\pi u - \frac{\theta_n}{2} \right) = \\ \frac{A_* A_n}{2i} \int_0^1 du \left(e^{-i\theta_n/2} \int_0^1 du e^{u(-\frac{1}{|\Gamma|} + in\pi)} - e^{i\theta_n/2} \int_0^1 du e^{u(-\frac{1}{|\Gamma|} - in\pi)} \right) \end{aligned} \quad (23) \quad \text{fstarfn}$$

On évalue immédiatement chaque intégrale :

$$\int_0^1 du e^{u \left(-\frac{1}{|\Gamma|} + in\pi \right)} = \frac{1}{-\frac{1}{|\Gamma|} + in\pi} \left(e^{-\frac{1}{|\Gamma|} + in\pi} - 1 \right) \quad (24) \quad \text{I1fastfn}$$

La valeur de l'autre intégrale est obtenue par conjugaison complexe. Et, finalement, on trouve que

$$\int_0^1 du f_*(u) f_n(u) \propto \left(\tan \frac{\theta_n}{2} - \Gamma n\pi \right) = 0 \quad (25) \quad \text{fastfano}$$

puisque $\tan \theta_n/2 = \Gamma n\pi$.

Ayant résolu le problème spectral, on peut, maintenant, résoudre l'équation d'ondes.

1.3 La solution de l'équation d'ondes avec conditions aux limites Robin : Démonstration du Théorème 1

DemoThm

La démonstration est constructive. Elle a, cependant, deux lacunes : (a) On n'a pas démontré que l'ensemble $\{f_*(u), f_n(u)\}$ est une base ; (b) on ne va pas démontrer que la série, construite à partir des $f_n(u)$, converge.

On exprime la fonction, $\phi(u, \tau)$ comme combinaison linéaire de la fonction $f_*(u)$ et des fonctions $f_n(u)$:

$$\phi(u, \tau) = c_*(\tau)f_*(u) + \sum_{n=1}^N c_n(\tau)f_n(u) \quad (26) \quad \text{solserie}$$

Pour N fini l'expression est, certainement, bien définie. On va montrer que l'on peut calculer explicitement les coefficients $c_*(\tau)$ et $c_n(\tau)$, à partir des conditions initiales.

On remplace l'expression pour $\phi(u, \tau)$ dans l'éq. (5). Le membre de gauche devient :

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \phi(u, \tau) = \frac{d^2 c_*(\tau)}{d\tau^2} f_*(u) + \sum_{n=1}^N \frac{d^2 c_n(\tau)}{d\tau^2} f_n(u) \quad (27) \quad \text{LHS1}$$

Le membre de droite à son tour, prend la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \phi(u, \tau) &= c_*(\tau) \frac{d^2}{du^2} f_*(u) + \sum_{n=1}^N c_n(\tau) \frac{d^2}{du^2} f_n(u) = \\ &= c_* \frac{1}{\Gamma^2} f_*(u) - \sum_{n=1}^N n^2 \pi^2 c_n(\tau) f_n(u) \end{aligned} \quad (28) \quad \text{RHS1}$$

Les membres de gauche de ces équations étant égaux, les membres de droite devront l'être, aussi :

$$\frac{d^2 c_*(\tau)}{d\tau^2} f_*(u) + \sum_{n=1}^N \frac{d^2 c_n(\tau)}{d\tau^2} f_n(u) = c_* \frac{1}{\Gamma^2} f_*(u) - \sum_{n=1}^N n^2 \pi^2 c_n(\tau) f_n(u) \quad (29) \quad \text{LHS1=RHS}$$

On exploite, maintenant, les relations d'orthogonalité (22) pour déduire un système d'équations différentielles ordinaires pour les coefficients, $c_*(\tau)$ et $c_n(\tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} c_*(\tau) &= \frac{1}{\Gamma^2} c_*(\tau) \\ \frac{d^2}{d\tau^2} c_n &= -n^2 \pi^2 c_n(\tau) \end{aligned} \quad (30) \quad \text{ODEc}$$

Les solutions générales de ces équations sont données par les expressions :

$$\begin{aligned} c_*(\tau) &= C_+ e^{\tau/|\Gamma|} + C_- e^{-\tau/|\Gamma|} \\ c_n(\tau) &= K_n \cos(n\pi\tau) + L_n \sin(n\pi\tau) \end{aligned} \quad (31) \quad \text{solODEc}$$

Les coefficients, $C_{\pm}$, K_n et L_n sont déterminés par les conditions initiales :

$$\begin{aligned}\phi(u, 0) &= f(u) = (C_+ + C_-) f_*(u) + \sum_{n=1}^N K_n f_n(u) \\ \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \phi(u, 0) &= \frac{C_+ - C_-}{\Gamma} f_*(u) + \sum_{n=1}^N n\pi L_n f_n(u)\end{aligned}\tag{32}$$

En exploitant l'orthogonalité des fonctions $f_*(u)$ et $f_n(u)$ on déduit un système d'équations pour les coefficients, qui, dans le cas actuel (6) est très simple :

$$\begin{aligned}C_+ &= C_- & L_n &= 0 \\ C_+ &= \frac{1}{2} \int_0^1 du F(u) f_*(u) & K_n &= \int_0^1 du F(u) f_n(u)\end{aligned}\tag{33}$$

et l'on déduit l'expression suivante pour $\phi(u, \tau)$:

$$\phi(u, \tau) = 2C_+ \cosh\left(\frac{\tau}{|\Gamma|}\right) f_*(u) + \sum_{n=1}^N K_n \cos n\pi\tau f_n(u)\tag{34}$$

qui décrit une fonction qui diverge exponentiellement avec le temps, puisque C_+ ne peut s'annuler, génériquement. Ceci est le signe d'une description incomplète. Il faut bien comprendre que la divergence exponentielle avec le temps est un sujet totalement distinct de la convergence ou non de la série sur $K_n \cos n\pi\tau f_n(u)$.

Dans la section suivante on cherchera à décrire une manière de compléter la description.

1.4 Les effets de la dispersion

Une manière de généraliser l'équation d'ondes, de façon à ce que celle-ci ait des solutions bornées en présence des conditions aux limites Robin est la suivante :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \beta \phi\tag{35}$$

On va montrer qu'il existe une valeur spéciale pour β , pour laquelle le terme en $\cosh(\tau/|\Gamma|)$ a un comportement totalement différent.

La démonstration est directe : on remplace dans l'équation (35) l'expression (26). La seule nouveauté est l'apparition de termes supplémentaires dans les équations pour les coefficients :

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\tau^2} c_* &= \left(\frac{1}{\Gamma^2} + \beta\right) c_* \\ \frac{d^2}{d\tau^2} c_n &= (-n^2\pi^2 + \beta) c_n\end{aligned}\tag{36}$$

On se rend compte que, si $\beta \leq -1/\Gamma^2$, alors les solutions de toutes les deux équations sont bornées—elle décrivent une dépendance périodique dans le temps et, par conséquent, cette condition est nécessaire pour que $\phi(u, \tau)$ soit bornée. (Elle n'est pas suffisante, car elle n'assure pas la convergence de la série sur les modes de valeurs propres positives.)

Si l'on pose $\Omega^2 \equiv -\beta - (1/\Gamma^2)$ et $\omega_n^2 \equiv n^2\pi^2 - \beta$, alors les solutions générales des équations (36) sont

$$\begin{aligned} c_*(\tau) &= C_+ \cos \Omega\tau + C_- \sin \Omega\tau \\ c_n(\tau) &= K_n \cos \omega_n\tau + L_n \sin \omega_n\tau \end{aligned} \quad (37) \quad \text{solODEcn}$$

On se rend compte que le traitement est tout à fait semblable au cas du spectre infini avant : On trouve $C_- = 0 = L_n$ et

$$\begin{aligned} C_+ &= \int_0^1 du F(u) f_*(u) \\ K_n &= \int_0^1 du F(u) f_n(u) \end{aligned} \quad (38) \quad \text{CplusKn}$$

et l'expression suivante pour la solution de l'équation d'ondes

$$\phi(u, \tau) = C_+ \cos(\Omega\tau) f_*(u) + \sum_{n=1}^N K_n \cos(\omega_n\tau) f_n(u) \quad (39) \quad \text{solnew}$$

On note que cette expression décrit, également, le cas spécial $\Omega = 0$, lorsque $\beta = -1/\Gamma^2$ et la contribution de la fonction propre $f_*(u)$ décrit un fond, indépendant du temps.

C'est, cependant, utile de comprendre que font les conditions aux limites—et celles de Robin en particulier. Pour ceci, il faut étudier les quantités conservées grâce aux symétries globales, comme la translation dans le temps—ce qui est l'énergie totale.

1.5 L'énergie totale et les conditions aux limites

Il y a plusieurs façons de montrer que l'éq. (35) est invariante sous la transformation $t \rightarrow t + \delta t \equiv t'$; la plus simple est par calcul direct. Il est moins trivial de trouver la quantité conservée, c.à.d. l'énergie totale.

La difficulté principale est comment tenir compte des conditions aux limites.

La manière “standard” est de montrer que la quantité

$$E = \int_0^1 du \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \right)^2 - \frac{\beta}{2} \phi^2 \right\} \quad (40) \quad \text{energy}$$

est conservée, si ϕ est solution de l'éq. (35)—à des contributions des bords près.

La démonstration est le résultat du calcul de $dE/d\tau$:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= \int_0^1 du \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial u} - \beta \phi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right\} = \\ &= \int_0^1 du \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} - \beta \phi \right) + \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial u} \right\} = \int_0^1 du \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial u} \right\} = \int_0^1 du \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right\} \end{aligned} \quad (41) \quad \boxed{dE/dt}$$

On note que le terme, auquel on a abouti, n'est pas identiquement nul ; c'est l'intégrale d'une dérivée totale. En identifiant l'intégrande, qui définit E , comme une densité d'énergie, ρ , on peut identifier l'argument de la dérivée totale comme une densité de courant, J et écrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial u} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div} \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (42) \quad \boxed{\text{currentc}}$$

Ici, bien sûr, $\mathbf{J}$ ne possède qu'une composante. Ce courant $\mathbf{J}$ n'est autre que le pendant du vecteur de Poynting pour le champ électromagnétique.

Le terme de bord peut être explicitement calculé, en terme des conditions aux limites :

$$\int_0^1 du \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right\} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial u} \right] (1, \tau) - \left[\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial u} \right] (0, \tau) \quad (43) \quad \boxed{\text{boundary}}$$

et l'on remarque qu'il ne s'annule identiquement que pour les conditions aux limites Neumann. Pour les conditions aux limites Dirichlet et Robin il y a un courant à travers les bords.

Par le traitement actuel on voudrait étudier quantitativement le comportement de ce courant, comme fonction du temps.

courant **Exercice 4.** *Tracer*

$$J_{\text{bord}}(\tau) = - \left[\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial u} \right] (1, \tau) + \left[\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial u} \right] (0, \tau)$$

comme fonction du temps, pour différentes valeurs de β et de Γ , en utilisant l'expression ^(solnew) (39) pour $\phi(u, \tau)$.

Indication : Employer les conditions aux limites Robin pour simplifier $J_{\text{bord}}(\tau)$ et montrer qu'il est donné par l'expression

$$J_{\text{bord}}^{\text{Robin}} = \frac{1}{\Gamma} \left(\phi(1, \tau) \frac{\partial \phi}{\partial \tau}(1, \tau) - \phi(0, \tau) \frac{\partial \phi}{\partial \tau}(0, \tau) \right) = \frac{1}{2\Gamma} \frac{\partial}{\partial \tau} (\phi(1, \tau)^2 - \phi(0, \tau)^2) \quad (44) \quad \boxed{J_{\text{bordRob}}}$$

Dans les exercices suivants on cherche à mieux comprendre ce que cette expression implique.

courantneg **Exercice 5.** Commencer avec une condition initiale, qui correspondrait à la fonction propre $f_*(u)$, c.à.d. $\phi(u, 0) = f_*(u)$, $\partial \phi(u, 0)/\partial \tau = 0$. Quelle est l'expression pour $J_{\text{bord}}(\tau)$? Comment dépend-elle des paramètres β et Γ ?

Solution : Si la condition initiale est $\phi(u, 0) = f_*(u)$ et $\frac{\partial \phi}{\partial \tau}(u, 0) = 0$, alors on a que $C_* = 1$ et $C_n = 0$, ainsi

$$\phi(u, \tau) = f_*(u) \quad (45) \quad \text{phiinitf}$$

Par conséquent, elle ne dépend pas du temps, ainsi $J_{\text{bord}} = 0$, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de flux d'énergie à travers les bords.

courantpos

Exercice 6. *Même question, pour le cas où $\phi(u, 0) = f_n(u)$ et $\partial \phi(u, 0)/\partial \tau = 0$.*

Solution : Dans ce cas, l'on a que $C_* = 0$ et $C_m = 1$ pour $m = n$ et zéro autrement. Ainsi

$$\phi(u, \tau) = \cos(\omega_n \tau) f_n(u) \quad (46) \quad \text{phiinitf}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u} &= \cos(\omega_n \tau) f'_n(u) \\ \frac{\partial \phi}{\partial \tau} &= -\omega_n \sin(\omega_n \tau) f_n(u) \end{aligned} \quad (47) \quad \text{Jbordunm}$$

Et l'expression pour le flux à travers le bord devient

$$\begin{aligned} J_{\text{bord}}(\tau) &= - \left[\frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right] (1, \tau) + \left[\frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right] (0, \tau) = \\ &= \omega_n \cos(\omega_n \tau) \sin(\omega_n \tau) (f'_n(1) f_n(1) - f'_n(0) f_n(0)) = \frac{\omega_n}{2\Gamma} \sin(2\omega_n \tau) (f_n(0)^2 - f_n(1)^2) \end{aligned} \quad (48) \quad \text{Jbordunm}$$

2fpropres

Exercice 7. *Même question, pour le cas où $C_+ \neq 0$ et un seul coefficient $K_{n_0} \neq 0$; ou $C_+ = 0$ et deux coefficients, K_{n_1} et $K_{n_2} \neq 0$.*

2 Partie informatique

partieinfo

Le traitement informatique a été réalisé par le code en C, `prog_tp0.c`, donné en annexe. Ici on présentera, tout d'abord, les tests, que le code a passé avec succès et, par la suite, on fournira les éléments pour l'entrée et la sortie plus en détail, ainsi que l'on décrira la structure des fonctions.

2.1 Tests du code

testscod

Pour s'assurer que le code fonctionne correctement, on a réalisé les tests suivants :

1. *Normalisation de la fonction propre $f_*(u)$.* L'évaluation de l'expression

$$\|f_*(u)\|^2 = \int_0^1 du [f_*(u)]^2 \quad (49) \quad \text{normefst}$$

est réalisée par une méthode d'intégration numérique, c.à.d. on pose $u_j \equiv j/(N+1)$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots, N+1$, où l'on évalue la fonction à intégrer, $[f_*(u)]^2$ et l'on utilise des

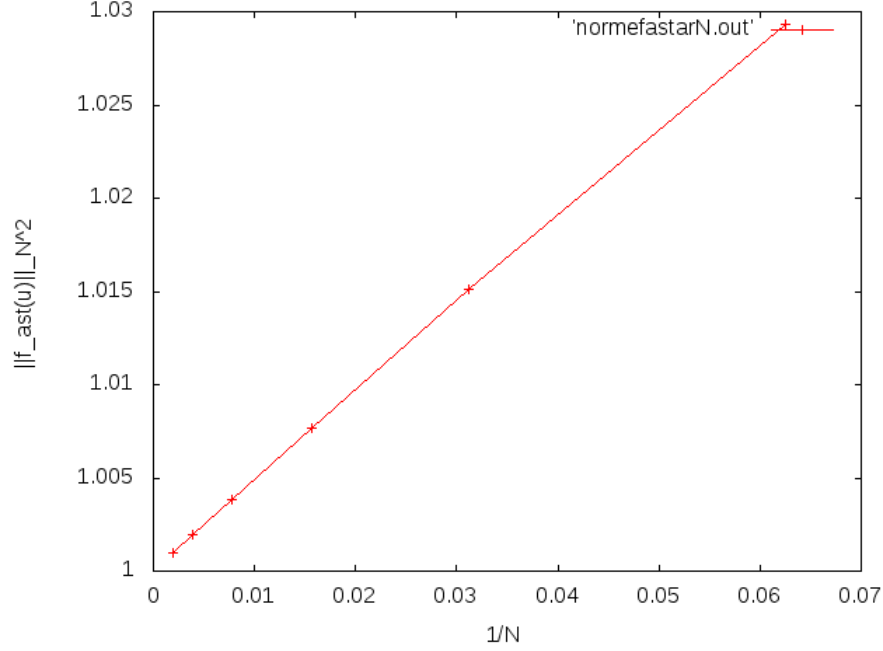


FIGURE 1 – La norme (au carré) de la fonction $f_*(u)$, calculée par la méthode des trapèzes, pour $N = 16, 32, 64, 128, 256$ et 512 points intermédiaires, affichée comme fonction de $1/N$.

coefficients, $\{s_j\}$, qui dépendent de la méthode concrète employée, pour trouver une valeur approchée pour l'intégrale (49) :

$$(\|f_*(u)\|^2)_N \equiv \sum_{j=0}^{N+1} s_j [f_*(u_j)]^2 \quad (50)$$

Le résultat de ce test est affiché dans la fig. 1.

2. *Normalisation des fonctions propres, $f_n(u)$.* On affiche, de la même façon, l'approximation à la norme, $\|f_n(u)\|_N^2$ des fonctions propres, du spectre positif. Pour ne pas surcharger le dessin, on ne montre que l'évolution, en $1/N$ pour $\|f_1\|_N^2$, $\|f_{N/2}\|_N^2$ et $\|f_N\|_N^2$ dans la fig. 2.
3. *Réconstruction de la condition initiale :* Après avoir testé que les fonctions propres sont correctement représentées par le code, on doit tester que la condition initiale l'est, également. En fait, son calcul teste que l'orthogonalité des fonctions propres est, aussi, correctement reproduite. Ainsi, dans la fig. 3, on affiche la condition initiale, évaluée aux points $u_j = j/(N+1), j = 0, 1, 2, 3, \dots, N+1$ (courbe rouge) ainsi que le résultat de

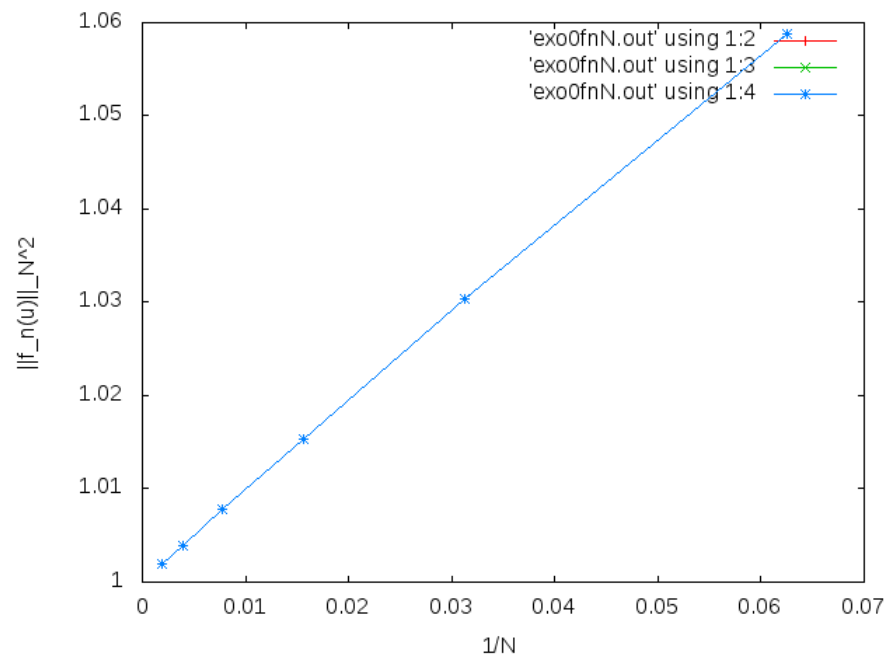


FIGURE 2 – La norme (au carré) des fonctions $f_1(u)$, $f_{N/2}(u)$ et $f_N(u)$, calculée par la méthode des trapèzes, pour $N = 16, 32, 64, 128, 256$ et 512 points intermédiaires, affichée comme fonction de $1/N$.

normefnN

l'évaluation par les sommes finies (courbe verte),

$$\begin{aligned}
[\phi(u_j, 0)]_N &\equiv [c_*]_N + \sum_{n=1}^N [c_n]_N f_n(u_j) \\
[c_*]_N &\equiv \sum_{j=0}^{N+1} s_j \phi(u_j, 0) f_*(u_j) \\
[c_n]_N &\equiv \sum_{j=0}^{N+1} s_j \phi(u_j, 0) f_n(u_j)
\end{aligned} \tag{51}$$

sommecon

4. *Test de la conservation locale de l'énergie par le calcul du flux à travers les bords* : On voudrait tester que le code peut reproduire l'expression (44) pour le flux à travers les bords.

Le test le plus simple est celui, où $\phi(u, 0) = f_*(u)$ et $\partial\phi(u, 0)/\partial\tau = 0$ (pour $\Omega^2 = 0$) puisque, dans ce cas, $\phi(u, \tau) = f_*(u)$ et, par conséquent, $J_{\text{bord}}(\tau) \equiv 0$.

On affiche $[J_{\text{bord}}(\tau)]_N$, calculé par le code, pour $N = 16 - 1024$ dans la fig. 4. On note que, à partir de $N = 512$, l'amplitude croît, au lieu de diminuer, tout en affichant des oscillations-symétriques-autour de la “vraie” valeur, zéro.

5. *Comprendre les propriétés de la solution $[\phi(u, \tau)]_N$, à partir de son graphe et, en particulier les cas limites, $\Gamma \rightarrow 0$ (Dirichlet) et $\Gamma \rightarrow \infty$ (Neumann) et, pour une valeur de N donnée, à partir de quelles valeurs de Γ commencent les domaines de chaque classe de conditions aux limites.* On affiche la solution dans la fig. 5.

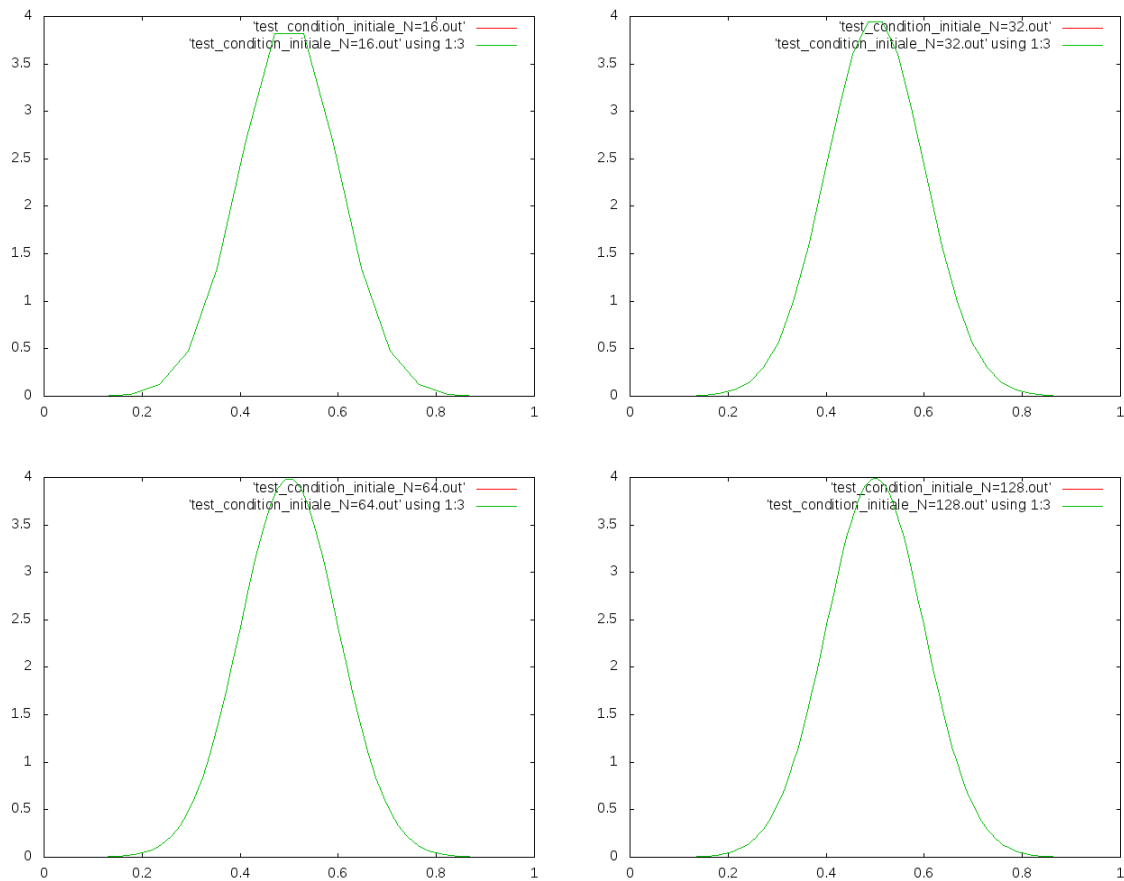


FIGURE 3 – Figures, qui montrent la relation entre la condition initiale, comme évaluée par la bibliothèque mathématique du compilateur C (courbe rouge) et par le formalisme de l'éq. (51), pour $N = 16, 32, 64, 128$. On remarque que la courbe verte et la courbe rouge se confondent et c'est juste le nombre fini de points qui fait que les courbes ne sont pas lisses, pour $N = 16, 32$; elle deviennent lisse pour $N > 32$.

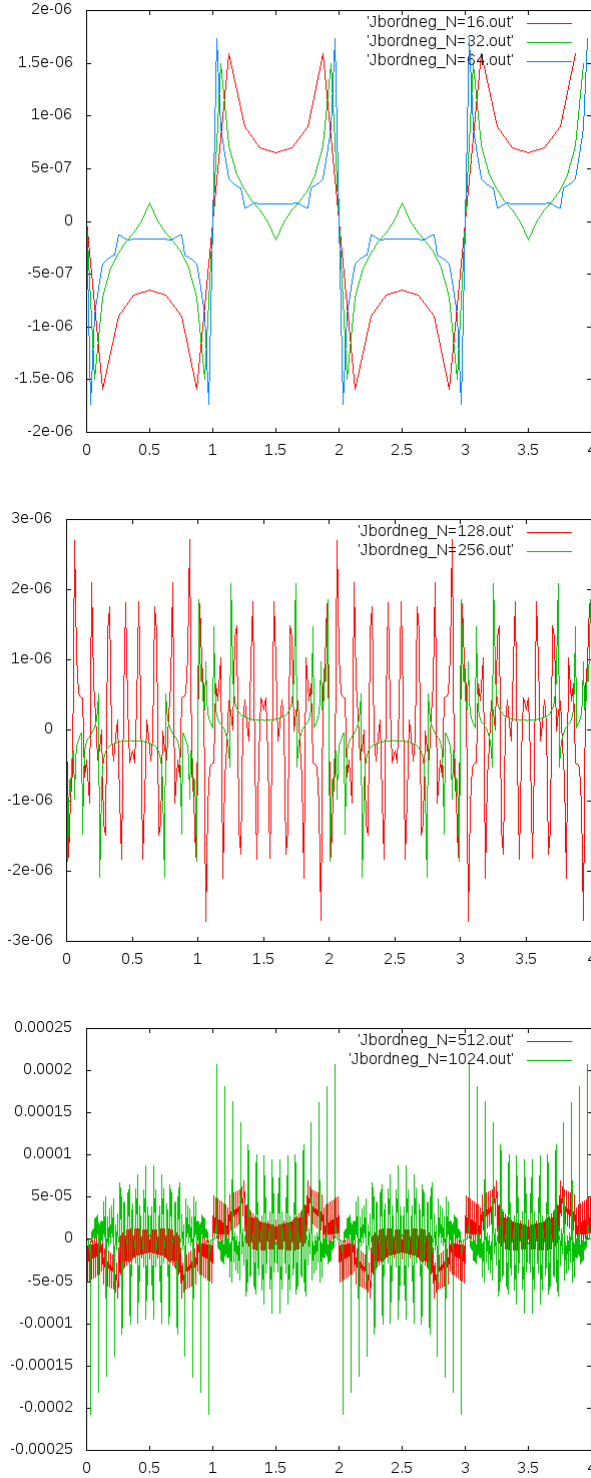


FIGURE 4 – Le flux à travers les bords, $[J_{\text{bord}}]_N$, pour le cas de la condition initiale $\phi(u, 0) = f_*(u)$, $\partial\phi(u, 0)/\partial u = 0$, pour $N = 16 - 1024$. On remarque que les courbes affichent des oscillations, symétriques autour de la “vraie” valeur, zéro, mais l’amplitude de ces oscillations ne décroît pas de façon monotone, lorsque N croît.

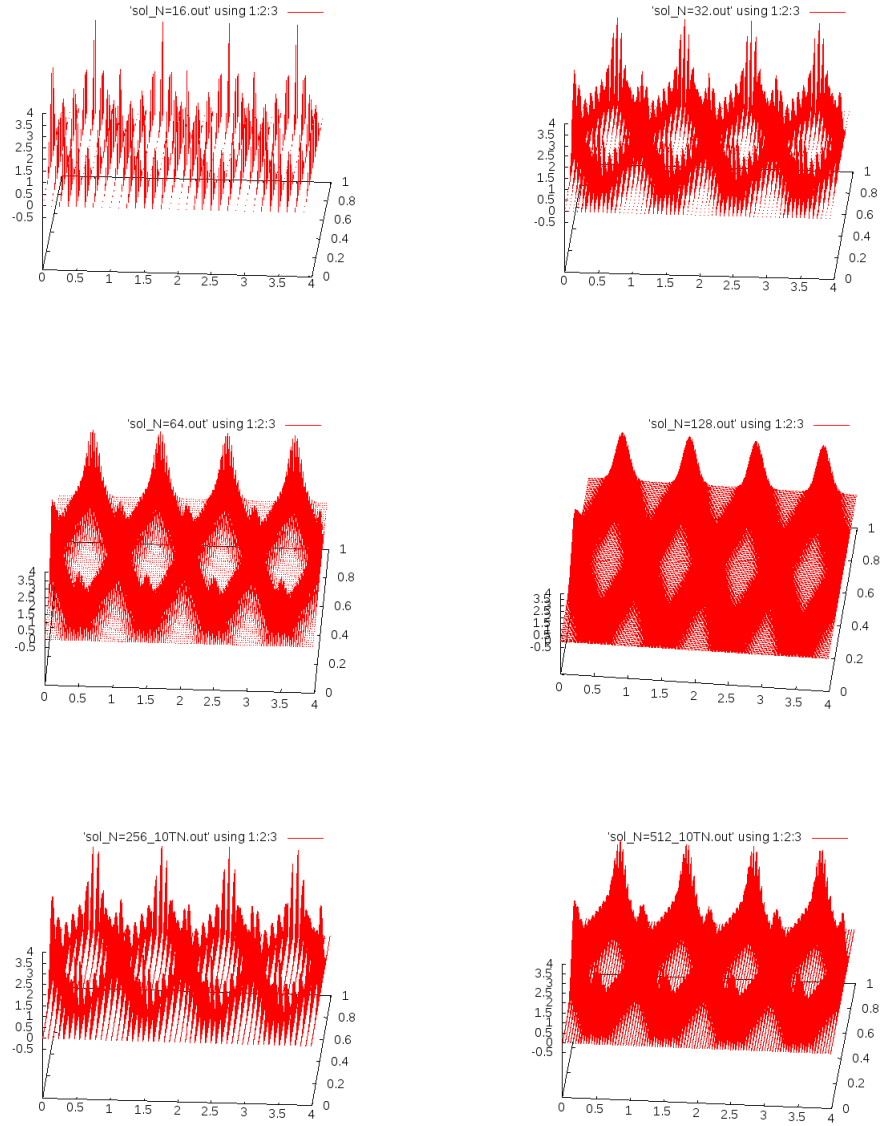


FIGURE 5 – La solution, $[\phi(u, \tau)]_N$, pour $N = 16, 32, 64, 128, 256$ et 512 et $\Gamma = 500$. Pour les cas $N = 256$ et $N = 512$, on affiche avec un pas de $10T_N = 10 \times 2\pi/\omega_N$.

solN