Université "François Rabelais" de Tours
L3 Physique 2018–2019
Electrodynamique classique

TD2 : Les solutions de l'équation d'ondes électromagnétiques en présence de "grands obstacles"

On travaille dans le système d'unités $\mu_0 = 1, \varepsilon_0 = 1$.

Les équations de Maxwell

$$\begin{array}{l} \mathrm{div}\,\mathbf{E} = \rho \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \tag{1}$$

peuvent être transcrites, en exprimant le champ électrique $\mathbf{E}$ et le champ magnétique $\mathbf{B}$, en termes des potentiels Φ et $\mathbf{A}$ comme

$$\begin{array}{l} \mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \mathrm{rot} \times\ \mathbf{A} \end{array} \tag{2}$$

comme des équations d'ondes *inhomogènes*

$$\begin{array}{l} \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi = \rho \\ \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} = \mathbf{J} \end{array} \tag{3}$$

pourvu que la condition

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathrm{div} \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{4}$$

est satisfaite.

On cherche à comprendre le sens physique des solutions possibles des équations (3), en présence de "grands obstacles"–une situation typique étant ; lorsqu'une onde, qui se propage dans un milieu, rencontre une interface planaire avec un autre milieu et cette interface est, essentiellement, d'extension infinie ; par conséquent, sa présence brise l'invariance de Lorentz dans la direction perpendiculaire à celle-ci et la préserve le long les deux directions parallèles à celle-ci.

Le fait que l'onde incidente est une onde électromagnétique–donc elle n'est pas, seulement, solution de l'équation d'ondes, mais, aussi, des équations de Maxwell–a des conséquences pour sa polarisation.

1. On considère le cas le plus simple : une onde électromagnétique, plane

$$\mathbf{E}_{\mathrm{inc}} = E_0 \mathbf{e}_x e^{\mathrm{i}(k_1 z - \omega t)} \tag{5}$$

se propageant le long l'axe Oz dans un milieu 1, supposé un diélectrique parfait.

— Donner l'expression du champ magnétique, $\mathbf{B}_{\mathrm{inc}}$ correspondant, ainsi que celle du vecteur de Poynting, $\mathbf{P}_{\mathrm{inc}} \equiv \mathbf{E}_{\mathrm{inc}} \times \mathbf{B}_{\mathrm{inc}}$.

A $z = 0$ il y a une interface avec un autre milieu, appelé milieu 2 : Les deux milieux diffèrent par la vitesse de propagation : $v_1 = \omega/k_1$, $v_2 = \omega/k_2$.

La présence de l'interface implique la présence d'une onde réfléchie, qui se propage dans le milieu 1 et d'une onde transmise, qui se propage dans le milieu 2.

Montrer que les expressions pour le champ électrique de chacune des ces ondes sont

$$\mathbf{E}_{\mathrm{ref}} = R E_0 \mathbf{e}_x e^{\mathrm{i}(-k_1 z - \omega t)} \tag{6}$$

et

$$\mathbf{E}_{\mathrm{trans}} = T E_0 \mathbf{e}_x e^{\mathrm{i}(k_2 z - \omega t)} \tag{7}$$

respectivement.

Donner les expressions du champ magnétique correspondant et du vecteur de Poynting.

Montrer que la continuité des champs électrique et magnétique à travers l'interface $z = 0$ implique les équations suivantes pour les coefficients R et T :

$$\begin{array}{l} 1 + R = T \\ 1 - R = \frac{k_2}{k_1} T \end{array} \tag{8}$$

Ecrire la loi de conservation de l'énergie, qui implique que l'énergie de l'onde incidente est égale à la somme de l'énergie de l'onde réfléchie et de l'énergie de l'onde transmise, pour montrer qu'elle peut être exprimer par la relation suivante entre les coefficients R et T :

$$1 = a|R|^2 + b|T|^2 \tag{9}$$

Trouver les coefficients a et b donner leur interprétation physique.

2. L'onde électromagnétique, qui se propage dans le milieu 1 est, ainsi, décrit par la superposition

$$\mathbf{E}_1 = E_0 (e^{\mathrm{i}k_1 z} + R e^{-\mathrm{i}k_1 z}) e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{10}$$

Calculer la densité d'énergie correspondante et discuter son profil spatial.

3. Si le milieu 2 est une lame d'épaisseur L montrer que les équations à résoudre sont

$$\begin{array}{l} 1 + R = \rho + \tau \\ 1 - R = \frac{k_2}{k_1} (-\rho + \tau) \\ \rho e^{-\mathrm{i}k_2 L} + \tau e^{\mathrm{i}k_2 L} = T e^{\mathrm{i}k_1 L} \\ -\rho e^{-\mathrm{i}k_2 L} + \tau e^{\mathrm{i}k_2 L} = \frac{k_1}{k_2} T e^{\mathrm{i}k_1 L} \end{array} \tag{11}$$

où ρ et τ sont les amplitudes (relatives) des ondes dans la lame. Discuter le profil spatial de la densité d'énergie dans le domaine $z > 0$ et si c'est possible, par des mesures de celle-ci de déduire l'épaisseur de la lame. Discuter, en particulier les effets de la phase des coefficients R et T et leur signification physique. Comment pourrait-on les mesurer ?

4. Si le champ électrique de l'onde incidente est donné par l'expression

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x e^{\mathrm{i}(k_x x \sin\theta + k_z z \cos\theta) - \omega t} \tag{12}$$

comment les calculs précédents sont-ils affectés ?

5. Les coefficients de réflexion, R et de transmission, T, peuvent-ils s'annuler ?

6. Qu'est-ce qui change, si le champ électrique est donné par l'expression

$$\mathbf{E} = E_0 \left(-\mathbf{e}_x \cos\theta + \mathbf{e}_z \sin\theta\right) e^{\mathrm{i}(k_x x \sin\theta + k_z z \cos\theta) - \omega t} \tag{13}$$

7. Discuter similarités et différences avec des calculs, similaires de point de vue mathématique, dans votre cours de mécanique quantique, en tenant compte du fait que le rapport k_2/k_1 peut être < 1 ou > 1.