Université "François Rabelais" de Tours
L3 Physique 2018–2019
Electrodynamique classique

TD1 : Les solutions de l'équation d'ondes

On travaille dans le système d'unités $\mu_0 = 1, \varepsilon_0 = 1$.

Les équations de Maxwell

$$\begin{array}{l} \mathrm{div}\,\mathbf{E} = \rho \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \tag{1}$$

peuvent être transcrites, en exprimant le champ électrique $\mathbf{E}$ et le champ magnétique $\mathbf{B}$, en termes des potentiels Φ et $\mathbf{A}$ comme

$$\begin{array}{l} \mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \mathrm{rot} \times\ \mathbf{A} \end{array} \tag{2}$$

comme des équations d'ondes *inhomogènes*

$$\begin{array}{l} \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi = \rho \\ \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} = \mathbf{J} \end{array} \tag{3}$$

pourvu que la condition

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathrm{div} \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{4}$$

est satisfaite.

On cherche à comprendre le sens physique des solutions possibles des équations (3).

1. **OPTIONNEL** : Montrer que les expressions

$$\begin{array}{l} \Phi(\mathbf{x}, t) = \mathrm{const} \displaystyle\int d^3\mathbf{x}'\, \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{const} \displaystyle\int d^3\mathbf{x}'\, \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{array} \tag{5}$$

sont solutions des équations (3).

Indication : Employer les coordonnées sphériques. Discuter leur sens physique.

2. **OPTIONNEL** : Montrer que les expressions

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x},t) &= \text{const}\int d^3\mathbf{x}'\,\frac{\rho(\mathbf{x}',t+|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) &= \text{const}\int d^3\mathbf{x}'\,\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t+|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\end{aligned} \tag{6}$$

   sont, également, solutions des équations (3).

   Indication : Employer les coordonnées sphériques.

   Discuter en quoi elles diffèrent des solutions (5).

3. **Travail noté** : Calculer les champ électrique et magnétique, pour une charge ponctuelle, au repos, $\rho(\mathbf{x},t) = q\delta(\mathbf{x})$, $\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0}$ et le vecteur de Poynting.

4. **Travail noté** : Si l'on fait un boost de Lorentz le long l'axe Ox, calculer les champs et le vecteur de Poynting et comparer avec le cas de la charge au repos. Montrer que le vecteur de Poynting ne contribue pas dans le zone du rayonnement.