Université "François Rabelais" de Tours
L3 Physique 2018–2019
Electrodynamique classique

TD0 : Les symétries des équations de Maxwell en absence des sources : Indications

On travaille dans le système d'unités $\mu_0 = 1, \varepsilon_0 = 1$.

Les équations de Maxwell

$$\begin{array}{l} \mathrm{div}\,\mathbf{E} = \rho \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \tag{1}$$

sont invariantes sous des transformations des champs (variables dépendantes) et/ou des coordonnées de l'espace et du temps. Ces transformations s'appellent "symétries" des équations de Maxwell. Leur intérêt pratique est que seules les combinaisons invariantes sous ses transformations sont des quantités physiques ; toutes les autres quantités dépendent du référentiel choisi (on doit en choisir toujours un, mais le choix est arbitraire) et ne servent qu'à la construction des quantités invariantes.

Après avoir déduit que toute solution des équations de Maxwell, en absence des sources, est solution de l'équation d'ondes, on cherchera à comprendre, comment les symétries de l'équation d'ondes se traduisent en symétries des équations de Maxwell et vice versa.

1 Boosts de Lorentz

Montrer que les transformations des coordonnées

$$\left.\begin{array}{l} x = \widetilde{x}\cosh\varphi + \widetilde{t}\sinh\varphi \\ t = \widetilde{x}\sinh\varphi + \widetilde{t}\cosh\varphi \\ y = \widetilde{y} \\ z = \widetilde{z} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \widetilde{x} = x\cosh\varphi - t\sinh\varphi \\ \widetilde{t} = -x\sinh\varphi + t\cosh\varphi \\ \widetilde{y} = y \\ \widetilde{z} = z \end{array} \tag{2}$$

où $\varphi \in \mathbb{R}$, laisse, également, l'équation d'ondes invariante et renvoie toute solution à une solution. De même que toute transformation de la même forme, impliquant une des trois coordonnées spatiales et la coordonnée temporelle.

Travail noté : Cette fois-ci montrer que ces transformations des coordonnées laissent les équations de Maxwell invariantes si les champs électriques et magnétiques "se mélangent" entre eux.

Ce mélange est assez “subtil”. Après quelques essais, on commence à se rendre compte que ce sont les composantes *orthogonales* à la direction spatial du boost qui se mélangent et ceci de façon similaire à un produit vectoriel :

$$\begin{array}{l} \widetilde{E}_x \equiv E_x \\ \widetilde{E}_y \equiv \alpha E_y + \beta B_z \\ \widetilde{E}_z \equiv a E_z + b B_y \\ \widetilde{B}_x \equiv B_x \\ \widetilde{B}_y \equiv c E_z + d B_y \\ \widetilde{B}_z \equiv \gamma E_y + \delta B_z \end{array} \tag{3}$$

Encore une fois, exprimer les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et les a, b, c, d en termes de la “rapidité” φ.

Indication : Essayons de comprendre comment l’équation $\mathrm{div}\cdot\mathbf{E} = 0$ s’écrit dans les nouvelles coordonnées–ou, de façon équivalente, comment l’équation $\widetilde{\mathrm{div}} \cdot \widetilde{\mathbf{E}} = 0$ est exprimée dans les anciennes :

$$\begin{array}{l} \widetilde{\mathrm{div}} \cdot \widetilde{\mathbf{E}} = \frac{\partial E_x}{\partial \widetilde{x}} + \frac{\partial \widetilde{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \widetilde{x}} + \frac{\partial E_x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \widetilde{x}} + \alpha\frac{\partial E_y}{\partial y} + \beta\frac{\partial B_z}{\partial y} + a\frac{\partial E_z}{\partial z} + b\frac{\partial B_y}{\partial z} = \\ \left(\cosh\varphi\frac{\partial E_x}{\partial x} + \alpha\frac{\partial E_y}{\partial y} + a\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) + \left(\sinh\varphi\frac{\partial E_x}{\partial t} + \beta\frac{\partial B_z}{\partial y} + b\frac{\partial B_y}{\partial z}\right) \end{array} \tag{4}$$

On remarque que, si l’on choisit $a = \alpha = \cosh\varphi$ et $\beta = -b = -\sinh\varphi$, l’on trouve que

$$\widetilde{\mathrm{div}} \cdot \widetilde{\mathbf{E}} = \cosh\varphi\ (\mathrm{div} \cdot \mathbf{E}) + \sinh\varphi \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} - (\mathrm{rot}\mathbf{B})_x\right) \tag{5}$$

On note que l’on n’a pas pu, déterminer les coefficients γ, δ et c et d. Mais l’on peut conjecturer, par les regroupements, que $\gamma = \beta = -\sinh\varphi$, $\delta = \alpha = \cosh\varphi$ et que $c = b = \sinh\varphi$, tandis que $a = d = \cosh\varphi$.

Et l’on peut contôler que l’on retrouve les autres équations de Maxwell dans le référentiel $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}, \widetilde{t})$, aussi.

Finalement, si l’on exprime $\sinh\varphi$ et $\cosh\phi$, en termes de $\tanh\phi$ et l’on identifie $\tanh\phi \equiv v$ (dans les unités où $c = 1$), on peut retrouver les expressions “conventionnelles.