Université "François Rabelais" de Tours
L3 Physique 2018–2019
Electrodynamique classique

TD0 : Les symétries des équations de Maxwell en absence des sources

On travaille dans le système d'unités $\mu_0 = 1, \varepsilon_0 = 1$.

Les équations de Maxwell

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \rho \\ &\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\tfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \\ &\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mathbf{J} + \tfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1}$$

sont invariantes sous des transformations des champs (variables dépendantes) et/ou des coordonnées de l'espace et du temps. Ces transformations s'appellent "symétries" des équations de Maxwell. Leur intérêt pratique est que seules les combinaisons invariantes sous ses transformations sont des quantités physiques ; toutes les autres quantités dépendent du référentiel choisi (on doit en choisir toujours un, mais le choix est arbitraire) et ne servent qu'à la construction des quantités invariantes.

Après avoir déduit que toute solution des équations de Maxwell, en absence des sources, est solution de l'équation d'ondes, on cherchera à comprendre, comment les symétries de l'équation d'ondes se traduisent en symétries des équations de Maxwell et vice versa.

1 Transformations globales

1. **Travail noté :** Montrer que, si l'on considère le cas, où $\rho = 0, \mathbf{J} = \mathbf{0}$, alors, les équations de Maxwell sont invariantes sous la transformations des champs :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{B} &= -\mathbf{e} \end{aligned} \tag{2}$$

   C.à.d. que, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont solutions des équations de Maxwell, en absence des sources, $\mathbf{e}$ et $\mathbf{b}$ le sont également. Attention : on n'y touche pas aux coordonnées de l'espace et du temps ! Ces transformations sont les mêmes à tout point de l'espace et à chaque instant du temps.

2. **Travail noté** : Si l'on considère la généralisation

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \alpha\mathbf{e} + \beta\mathbf{b} \\ \mathbf{B} &= \gamma\mathbf{e} + \delta\mathbf{b} \end{aligned} \tag{3}$$

on se rend compte que l cas précédent correspond au cas spécial $\alpha = 0 = \delta$, $\beta = 1 = -\gamma$, qui correspond à une rotation de 90° pour chaque composante $(E_i, B_i), i = 1, 2, 3$. Est-ce qu'une rotation d'un angle η quelconque, c.à.d.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \cos\eta\mathbf{e} + \sin\eta\mathbf{b} \\ \mathbf{B} &= -\sin\eta\mathbf{e} + \cos\eta\mathbf{b} \end{aligned} \tag{4}$$

laisse, également, invariantes les équations de Maxwell, en absence de sources ?

On déduit facilement que toute solution des équations de Maxwell (1) est solution de l'équation d'ondes

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5}$$

Il s'agit de six équations indépendantes, une par composante.

Mais toute solution de l'équations d'ondes (5) n'est pas solution des équations de Maxwell !

3. **Travail noté :** Montrer que seules les solutions, pour lesquelles $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, sont, aussi, solutions des équations de Maxwell. Cette condition est-elles suffisante ?
4. Montrer que la transformation des coordonnées

$$\begin{aligned} x &= \widetilde{x}\cos\theta + \widetilde{y}\sin\theta \\ y &= -\widetilde{x}\sin\theta + \widetilde{y}\cos\theta \\ z &= \widetilde{z} \\ t &= \widetilde{t} \end{aligned} \tag{6}$$

   où $\theta \in \mathbb{R}$, laissent l'équation d'ondes invariante et renvoie toute solution à une solution. De même que toute transformation de la même forme, impliquant deux des trois coordonnées spatiales.

   Travail noté : Est-ce que ces transformations laissent, également, les équations de Maxwell invariantes, sans devoir transformer les champs ? Ou doit-on remplacer les champs électrique et magnétique par le résultat d'une rotation correspondante, c.à.d.

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_x &\equiv \alpha E_x + \beta E_y \\ \widetilde{E}_y &\equiv \gamma E_x + \delta E_y \\ \widetilde{B}_x &\equiv \alpha B_x + \beta B_y \\ \widetilde{B}_y &\equiv \gamma B_x + \delta B_y \end{aligned} \tag{7}$$

   Déterminer les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en termes de l'angle θ.
5. Montrer que les transformations des coordonnées

$$\begin{aligned} x &= \widetilde{x}\cosh\varphi + \widetilde{t}\sinh\varphi \\ t &= \widetilde{x}\sinh\varphi + \widetilde{t}\cosh\varphi \\ y &= \widetilde{y} \\ z &= \widetilde{z} \end{aligned} \tag{8}$$

pù $\varphi \in \mathbb{R}$, laisse, également, l'équation d'ondes invariante et renvoie toute solution à une solution. De même que toute transformation de la même forme, impliquant une des trois coordonnées spatiales et la coordonnée temporelle.

Travail noté : Cette fois-ci montrer que ces transformations des coordonnées laissent les équations de Maxwell invariantes si les champs électriques et magnétiques "se mélangent" entre eux :

$$\begin{array}{l} \widetilde{E}_y \equiv \alpha E_y + \beta B_z \\ \widetilde{B}_z \equiv \gamma E_y + \delta B_z \\ \widetilde{E}_z \equiv a E_z + b B_y \\ \widetilde{B}_y \equiv c E_z + d B_y \end{array} \tag{9}$$

Encore une fois, exprimer les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et les a, b, c, d en termes de la "rapidité" φ.

2 Transfromations locales

Les éqations de Maxwell (1), impliquent que

$$\begin{array}{l} \mathbf{B} = \mathrm{rot}\, \mathbf{A} \\ \mathrm{rot}\, \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{E} = -\mathrm{grad}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{array} \tag{10}$$

Montrer que les potentiels $(\Phi, \mathbf{A})$ ne sont pas définis de manière univoque : Si l'on les redéfinit comme

$$\begin{array}{l} \mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathrm{grad} f \\ \Phi = \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \end{array} \tag{11}$$

les expressions pour les champs électrique et magnétique ne changent pas (pourvu, toujours, que les dérivées mixtes soient égales !).

Ces transformations dépendent de la fonction $f(x, y, z, t)$ et s'appellent *transformations de jauge*.

1. Trouver la classe des fonctions $f(x, y, z, t)$, pour lesquelles les potentiels satisfont la relation

   $$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathrm{div} \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{12}$$

   Une telle condition s'appelle une *condition de jauge*.

2. **Travail noté :** Sachant comment se transforment les champs sous rotations et transformations de Lorentz, trouver comment se transforment les potentiels.

3. **Travail noté** : Montrer que l'expression

   $$\int \left(\Phi - \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) dt \tag{13}$$

est invariante sous rotations et transformations de Lorentz et que, sous transformations de jauge, elle change par un terme de bord à déterminer.
OPTIONNELLE : Quelle est l'implication pour la quantité :

$$U \equiv \exp\left(\mathrm{i}\int\left(\Phi - \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)dt\right) \tag{14}$$

Indication : Employer le théorème de Stokes.