Université "François Rabelais" de Tours
L3 Physique 2018–2019
Electrodynamique classique

L3 : Electrodynamique

Durée : 2h. Tous documents autorisés. Choisir **un** *sujet.*

On travaille dans le système d'unités $\mu_0 = 1, \varepsilon_0 = 1$ et, par conséquent, $c = 1$.

1. **Sujet** :
   (a) Montrer que, pour tout champ électrique et magnétique, solution des équations de Maxwell, la densité de l'énergie et l'impulsion est conservée dans le sens que

   $$\mathrm{div}\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*\right) = -K\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^*\right)$$

   où K est une constante à déterminer.

   (b) Déterminer ces expressions pour une onde plane dont le champ électrique est donné par

   $$\mathbf{E} = E_0\frac{\mathbf{e}_x + m\mathbf{e}_y}{\sqrt{1+|m|^2}}e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$$

   où m est un nombre *complexe* constant, qui décrit la polarisation de l'onde.

   (c) Une autre quantité que l'on peut définir, est la suivante :

   $$P_I = \mathrm{Im}\left(\mathbf{E}^*\cdot\frac{\partial}{\partial x_I}\mathbf{E} + \mathbf{B}^*\cdot\frac{\partial}{\partial x_I}\mathbf{B}\right)$$

   avec $I = 1,2,3$ et $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$. Calculer son expression et sa divergence, pour l'onde plane proposée et montrer qu'elle est, également, conservée, dans le sens que sa divergence, membre de gauche de l'équation suivante

   $$\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3} \stackrel{?}{=} -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

   peut être identifiée avec la dérivée par rapport au temps d'une quantité, que l'on appelle, alors, la densité correspondante, dont l'expression est donnée par

   $$\rho = -\mathrm{Im}\left(\mathbf{E}^*\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + \mathbf{B}^*\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\right)$$

   La calculer pour l'onde plane proposée et discuter la dépendance de P_I et de ρ sur m.

   Indication : On se rappelle qu'en absence de sources, le champ électrique et le champ magnétique satisfont l'équation d'ondes.

2. **Sujet** :

Soit le potentiel vecteur, dont seule la composante A_ϕ (en coordonnées sphériques) est non–nulle. On sait que le potentiel vecteur n'est pas défini de façon unique et l'on voudrait explorer les conséquences de deux choix :

$$A_\phi = \begin{cases} \dfrac{g}{4\pi r}\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \equiv A_\phi^N \\ -\dfrac{g}{4\pi r}\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \equiv A_\phi^S \end{cases}$$

(a) Montrer que ces deux expressions du potentiel vecteur sont reliées par la transformation suivante :

$$A_\phi^N = A_\phi^S + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi f$$

et déterminer la fonction f qui réalise cette transformation.

(b) Calculer le champ magnétique $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, correspondant et montrer que sa seule composante non–nulle est la composante radiale, B_r, qu'elle ne dépend pas du choix du potentiel vecteur et qu'elle est donnée par l'expression

$$B_r = \frac{g}{4\pi r^2}$$

Calculer le flux de ce champ magnétique à travers la surface d'une sphère de rayon R, centrée sur l'origine et discuter similarités et différences avec le cas du champ électrique d'une charge électrique ponctuelle, posée à l'origine.

Indication : Comparer les expressions $A_\phi^{N,S}$ pour le potentiel vecteur avec l'expression pour le potentiel scalaire $\Phi = q/(4\pi r)$, pour une charge électrique ponctuelle–où sont-elles singulières ?

(c) Calculer $\mathrm{div}\,\mathbf{B}$; le champ magnétique déterminé par les $A_\phi^{N,S}$, est-il solution des équations de Maxwell ?

On se rappelle que $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ *en coordonnées sphériques est donnée par l'expression*

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{e}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right) + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right) + \mathbf{e}_\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$