Université "François Rabelais" de Tours
L3 Physique 2018–2019
Electrodynamique classique

**Corrigé : L3 : Electrodynamique**

*Durée : 2h. Tous documents autorisés. Choisir* **un** *sujet.*

On travaille dans le système d'unités $\mu_0 = 1, \varepsilon_0 = 1$ et, par conséquent, $c = 1$.

1. **Sujet** :
   (a) Montrer que, pour tout champ électrique et magnétique, solution des équations de Maxwell, la densité de l'énergie et l'impulsion est conservée dans le sens que

$$\mathrm{div}\,\mathrm{Re}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*) = -K\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^*\right)$$

où $K$ est une constante à déterminer.

*Réponse* : On note, tout d'abord que

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \varepsilon_{IJK}\partial_I(E_J B_K) = \varepsilon_{IJK}(\partial_I E_J)B_K + \varepsilon_{IJK}E_J(\partial_I B_K)$$

Ensuite, que

$$\varepsilon_{IJK}(\partial_I E_J)B_K = (\mathrm{rot}\,\mathbf{E})\cdot\mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\cdot\,\mathbf{B} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right)$$

De même

$$\varepsilon_{IJK}E_J(\partial_I B_K) = -\varepsilon_{JIK}E_J(\partial_I B_K) = -\mathbf{E}\cdot(\mathrm{rot}\,\mathbf{B}) = -\mathbf{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\cdot\,\mathbf{E}\right)$$

Par conséquent on en déduit que

$$\mathrm{div}\,\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) = (\mathrm{rot}\,\mathbf{E})\cdot\mathbf{B} - \mathbf{E}\cdot(\mathrm{rot}\,\mathbf{B}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\cdot\,\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right)$$

Maintenant considérons le cas où les champs peuvent prendre des valeurs complexes.

Si l'on considère, en particulier, l'expression

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\cdot\,\mathbf{E}^*+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^*\right) = -\left(\dot{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{E}^* + \mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{E}}^* + \dot{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{B}^* + \mathbf{B}\cdot\dot{\mathbf{B}}^*\right) =$$
$$-\left((\mathrm{rot}\,\mathbf{B})\cdot\mathbf{E}^* + \mathbf{E}\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}^* - (\mathrm{rot}\,\mathbf{E})\cdot\,\mathbf{B}^* - \mathbf{B}\cdot\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{E}^*)\right)$$

On note que

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{B})\cdot\mathbf{E}^* - \mathbf{B}\cdot\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{E}^*) = -\mathrm{div}\,\left(\mathbf{E}^*\times\mathbf{B}\right)$$

ainsi que

$$\mathbf{E}\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}^* - (\mathrm{rot}\,\mathbf{E})\cdot\,\mathbf{B}^* = -\mathrm{div}\,\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*\right)$$

Par conséquent

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\cdot\,\mathbf{E}^* + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^*\right) = -\mathrm{div}\,\left(\mathbf{E}^*\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\mathbf{B}^*\right) = -\mathrm{div}\,2\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*\right) \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{div}\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^*\right)$$

et l'on trouve que $K = -1/2$.

(b) Déterminer ces expressions pour une onde plane dont le champ électrique est donné par

$$\mathbf{E} = E_0\frac{\mathbf{e}_x + m\mathbf{e}_y}{\sqrt{1+|m|^2}}e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$$

où $m$ est un nombre *complexe* constant, qui décrit la polarisation de l'onde.

*Réponse* : On doit, tout d'abord, déterminer le champ magnétique. La loi de Faraday, $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ implique que $\mathrm{i}\omega\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{E}$, pour les champs électrique et magnétique, d'une onde électromagnétique. D'autre part $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathrm{i}\mathbf{k}\times\,\mathbf{E}$. Ainsi,

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega}\times\,\mathbf{E}$$

Dans notre cas, $\mathbf{k} = (0,0,k)$, par conséquent,

$$\mathbf{B} = \frac{kE_0e^{\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{1+|m|^2}}\left(\mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_z + m\mathbf{e}_y\times\mathbf{e}_z\right) = \frac{kE_0e^{\mathrm{i}kz-\omega t}}{\sqrt{1+|m|^2}}\left(m\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y\right)$$

Ainsi,

$$\mathbf{B}^* = \frac{kE_0^*e^{-\mathrm{i}kz+\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{1+|m|^2}}\left(m^*\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y\right)$$

Aussi,

$$\mathbf{E}^* = E_0^*\frac{\mathbf{e}_x + m^*\mathbf{e}_y}{\sqrt{1+|m|^2}}e^{\mathrm{i}(-kz+\omega t)}$$

Une conséquence de ces relations est que $\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*$ et $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^*$ sont indépendants du temps :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^*\right) = 0$$

D'autre part, si l'on calcule $\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*$, on trouve que

$$\mathbf{E}\times\mathbf{B}^* = \tfrac{k|E_0|^2}{1+|m|^2}\left(\mathbf{e}_x + m\mathbf{e}_y\right)\times\left(m^*\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y\right) = \tfrac{k|E_0|^2}{1+|m|^2}\left(-1-|m|^2\right)\mathbf{e}_z = -kE_0^2\mathbf{e}_z \Rightarrow$$
$$\mathrm{Re}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*) = -k\,\mathrm{Re}(|E_0|^2)\,\mathbf{e}_z$$

et l'on note que

$$\mathrm{div}\,\mathrm{Re}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*) = 0$$

un résultat cohérent avec la loi de conservation locale.

(c) Une autre quantité que l'on peut définir, est la suivante :

$$P_I = \mathrm{Im}\left(\mathbf{E}^*\cdot\frac{\partial}{\partial x_I}\mathbf{E} + \mathbf{B}^*\cdot\frac{\partial}{\partial x_I}\mathbf{B}\right)$$

avec $I = 1, 2, 3$ et $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$. Calculer son expression et sa divergence, pour l'onde plane proposée et montrer qu'elle est, également, conservée, dans le sens que sa divergence, membre de gauche de l'équation suivante

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3} \stackrel{?}{=} -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{1}$$

peut être identifiée avec la dérivée par rapport au temps d'une quantité, que l'on appelle, alors, la densité correspondante, dont l'expression est donnée par

$$\rho = -\mathrm{Im}\left(\mathbf{E}^*\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + \mathbf{B}^*\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\right)$$

La calculer pour l'onde plane proposée et discuter la dépendance de $P_I$ et de $\rho$ sur $m$.

*Indication :* On se rappelle qu'en absence de sources, le champ électrique et le champ magnétique satisfont l'équation d'ondes.

*Réponse* : On calcule, tout simplement, les deux membres de l'éq. (1) :

$$\begin{array}{l}\dfrac{\partial P_I}{\partial x_I} = \mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_I}\left(\mathbf{E}^*\cdot\dfrac{\partial}{\partial x_I}\mathbf{E}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_I}\left(\mathbf{B}^*\cdot\dfrac{\partial}{\partial x_I}\mathbf{B}\right)\right) = \\ \mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial\mathbf{E}^*}{\partial x_I}\cdot\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial x_I} + \dfrac{\partial\mathbf{B}^*}{\partial x_I}\cdot\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial x_I}\right) + \mathrm{Im}\left(\mathbf{E}^*\cdot\nabla^2\mathbf{E} + \mathbf{B}^*\cdot\nabla^2\mathbf{B}\right)\end{array}$$

où l'on somme sur les indices répétés.

On note, maintenant, que le premier terme de cette expression est égal à zéro, car l'expression entre parenthèses est réelle–donc sa partie imaginaire s'annule. Puisque les champs électrique et magnétique satisfont l'équation d'ondes, on a que $\nabla^2\mathbf{E} = \ddot{\mathbf{E}}$ et $\nabla^2\mathbf{B} = \ddot{\mathbf{B}}$.

Si l'on calcule, maintenant $\partial\rho/\partial t$, on trouve la même expression, car

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{Im}\left(\dot{\mathbf{E}}^*\cdot\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{B}}^*\cdot\dot{\mathbf{B}}\right) - \mathrm{Im}\left(\mathbf{E}^*\cdot\ddot{\mathbf{E}} + \mathbf{B}^*\cdot\ddot{\mathbf{B}}\right)$$

Le premier terme est égal à zéro, car la partie imaginaire d'une expression réelle s'annule et le deuxième terme de cette expression est égale–au signe demandé près–au deuxième terme de l'expression précédente, car les champs électrique et magnétique satisfont l'équation d'ondes.

Maintenant on va considérer la dépendance des $P_I$ et $\rho$ sur le paramètre $m$ des expressions pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ de ce sujet.

On remarque que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, en fait, ne sont fonctions que de $z \equiv x_3$ et de $t$. Par conséquent, $P_1 = 0 = P_2$ et

$$P_3 = -\mathrm{Im}\left(\mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \mathbf{B}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}\right) = -|E_0|^2\left(k + k^2\right)$$

puisque $\omega = |\mathbf{k}|$.

En ce qui concerne $\rho$,

$$\rho = -\mathrm{Im}\left(\mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + \mathbf{B}^* \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\right) = |E_0|^2(\omega + \omega^2)$$

On remarque que la loi de conservation est bien vérifiée ; et que ces quantités sont indépendantes de $m$. Pour qu'il y ait une dépendance sur $m$, il aurait fallu que les dérivées des champs par rapport à l'espace et le temps modifient le signe relatif dans $\mathbf{e}_x + m\mathbf{e}_y$, ce qui est impossible.

2. **Sujet** :

   Soit le potentiel vecteur, dont seule la composante $A_\phi$ (en coordonnées sphériques) est non–nulle. On sait que le potentiel vecteur n'est pas défini de façon unique et l'on voudrait explorer les conséquences de deux choix :

$$A_\phi = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{g}{4\pi r}\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \equiv A_\phi^N \\ -\dfrac{g}{4\pi r}\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \equiv A_\phi^S \end{array} \right.$$

   (a) Montrer que ces deux expressions du potentiel vecteur sont reliées par la transformation suivante :

$$A_\phi^N = A_\phi^S + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi f$$

   et déterminer la fonction $f$ qui réalise cette transformation.

   *Réponse* : Par calcul direct on trouve que

$$A_\phi^N - A_\phi^S = \frac{2g}{4\pi r\sin\theta} = \frac{g}{2\pi r\sin\theta}$$

   ce qui implique que $\partial f/\partial\phi = g/(2\pi)$ et $f(\phi) = g\phi/(2\pi)$.

   Par ailleurs, on remarque que la relation entre $A_\phi^N$ et $A_\phi^S$ est une transformation de jauge.

(b) Calculer le champ magnétique $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, correspondant et montrer que sa seule composante non–nulle est la composante radiale, $B_r$, qu'elle ne dépend pas du choix du potentiel vecteur et qu'elle est donnée par l'expression

$$B_r = \frac{g}{4\pi r^2}$$

*Réponse* : C'est une application directe de l'expression pour $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$.

Calculer le flux de ce champ magnétique à travers la surface d'une sphère de rayon $R$, centrée sur l'origine et discuter similarités et différences avec le cas du champ électrique d'une charge électrique ponctuelle, posée à l'origine.

*Réponse* : Par calcul direct

$$\Phi = \oint \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS = \int r^2 dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \frac{g}{4\pi r^2} = g$$

ce qui décrit le flux d'une charge ponctuelle de grandeur $g$.

*Indication :* Comparer les expressions $A_\phi^{N,S}$ pour le potentiel vecteur avec l'expression pour le potentiel scalaire $\Phi = q/(4\pi r)$, pour une charge électrique ponctuelle–où sont-elles singulières ?

*Réponse* : On note que $\Phi$ est singulière à l'origine, $r = 0$ ; tandis que $A_\phi$ sont singulières à $r = 0$ et à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ ; mais ces singularités sont "mobiles"–elles dépendent du système des coordonnées–tandis que la singularité à $r = 0$ est, dans les deux cas, "immobile". Les singularités à $\theta = 0$ et/ou $\theta = \pi$ sont des lignes, appelées "les cordes de Dirac".

(c) Calculer $\mathrm{div}\,\mathbf{B}$ ; le champ magnétique déterminé par les $A_\phi^{N,S}$, est-il solution des équations de Maxwell ?

*Réponse* : Un calcul direct conduit à $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$, sauf à $r = 0$, où elle vaut $g$.

*On se rappelle que* $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ *en coordonnées sphériques est donnée par l'expression*

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{e}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right) + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right) + \mathbf{e}_\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$