

Les transformations de Möbius

Stam Nicolis¹

*CNRS–Institut Denis Poisson (UMR7013)
Université de Tours, Université d'Orléans
Parc Grandmont, 37200 Tours, France*

Résumé

Quelques exemples des transformations de Möbius.

1. E-Mail : Stam.Nicolis@lmpt.univ-tours.fr

Table des matières

1	Introduction	2
2	La dynamique de la récurrence de Möbius	3
3	La répartition des sommets des polygones sur le cercle	6
4	Les domaines obscurs	9
A	Le code Python	15
B	Le code Python pour les domaines obscurs	15

1 Introduction

Les transformations de Möbius sont définies par

$$z_{n+1} = \frac{az_n + b}{cz_n + d} \quad (1)$$

Un cas particulier est celui où $ad - bc = 1$. Cette relation peut être représentée par $a = \cos \theta = d, b = -c = -\sin \theta$.

Proposition 1. *La solution de la récurrence (1), lorsque $a = \cos \theta = d, b = -c = -\sin \theta$, est donnée par l'expression*

$$z_n = \frac{z_0 \cos n\theta - \sin n\theta}{z_0 \sin n\theta + \cos n\theta} \quad (2)$$

Démonstration. On va démontrer que l'expression (2) est la solution de la récurrence (1), lorsque $a = d = \cos \theta$ et $b = -c = -\sin \theta$, par récurrence :

1. On montre que (2) est valable pour $n = 0$:

$$z_0 = \frac{z_0 \cos(0) - \sin(0)}{z_0 \sin(0) + \cos(0)} = z_0 \quad (3)$$

2. On fait l'hypothèse que (2) est la solution pour $n = p > 0$:

$$z_p = \frac{z_0 \cos(p\theta) - \sin(p\theta)}{z_0 \sin(p\theta) + \cos(p\theta)} \quad (4)$$

3. On va montrer que cette hypothèse implique que z_{p+1} , calculé à partir de l'éq. (2), est égal au résultat, calculé à partir de l'éq. (1), c.à.d.

$$z_{p+1} = \frac{z_0 \cos[(p+1)\theta] - \sin[(p+1)\theta]}{z_0 \sin[(p+1)\theta] + \cos[(p+1)\theta]} \stackrel{?}{=} \frac{z_p \cos \theta - \sin \theta}{z_p \sin \theta + \cos \theta} \quad (5)$$

Si l'on résout cette dernière équation pour z_p et l'on emploie les identités

$$\begin{aligned} \cos[(p \pm 1)\theta] &= \cos p\theta \cos \theta \mp \sin p\theta \sin \theta \\ \sin[(p \pm 1)\theta] &= \sin p\theta \cos \theta \pm \cos p\theta \sin \theta \end{aligned} \quad (6)$$

on se rend compte que les deux expressions pour z_{p+1} sont, effectivement, identiques.

□

Théorème 1. *Si θ est un multiple rationnel de 2π , $\theta = 2\pi l/k$, avec $l, k \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{z_n\}$ est périodique.*

Démonstration. L'expression (2) pour la solution de la récurrence implique que, dans ce cas

$$z_n = \frac{z_0 \cos 2\pi \frac{nl}{k} - \sin 2\pi \frac{nl}{k}}{z_0 \sin 2\pi \frac{nl}{k} + \cos 2\pi \frac{nl}{k}} \quad (7)$$

Maintenant on sait que l'entier n peut être écrit comme

$$n = mk + r \quad (8)$$

avec $0 \leq r < k$.

En remplaçant cette expression pour n dans (7) on trouve, grâce à la périodicité des fonctions sinus et cosinus, $\cos 2\pi ml = 1$, $\sin 2\pi ml = 0$, que la suite $z_n = z_{mk+r} = z_r$, donc ne peut prendre que k valeurs ; c'est une suite périodique, de période k —pourvu que k soit un nombre premier. □

2 La dynamique de la récurrence de Möbius

Ce que ces propositions ne disent pas est l'ordre, avec lequel les k points, $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}, z_k = z_0$ sont visités. A cette fin on écrit un programme en Python (cf. Annexe). Le résultat de ce programme, pour $k = 5$ et $l = 1, 2, 3$ et 4, est affiché dans la fig. 1. On peut se rendre compte que, pour $l = 1$ et $l = 4$, les $k = 5$ points sont visités sous la forme “étoilée”, tandis que, pour $l = 2$ et $l = 3$ ils sont visités sous la forme “convexe”.

Ces résultats sont la motivation pour des questions suivantes :

1. **Question** : Ces points appartiennent-ils tous au même cercle ?
2. **Question** : Si oui, quel est le centre et quel le rayon de ce cercle ?

La réponse à la première question est OUI, ce qui donne un sens à la deuxième.

La réponse à la première question est exprimée par le théorème suivante :

Théorème 2. *Les éléments de la suite, $\{z_n\}$, définie par l'éq. (2), pour $y_0 \neq 0$, appartiennent à un cercle, c.à.d. l'éq. (2), avec $z_n = x_n + iy_n$, peut être écrite sous la forme*

$$(x_n - X)^2 + (y_n - Y)^2 = R^2 \quad (9)$$

avec $X, Y, R \in \mathbb{R}$, indépendants de n .

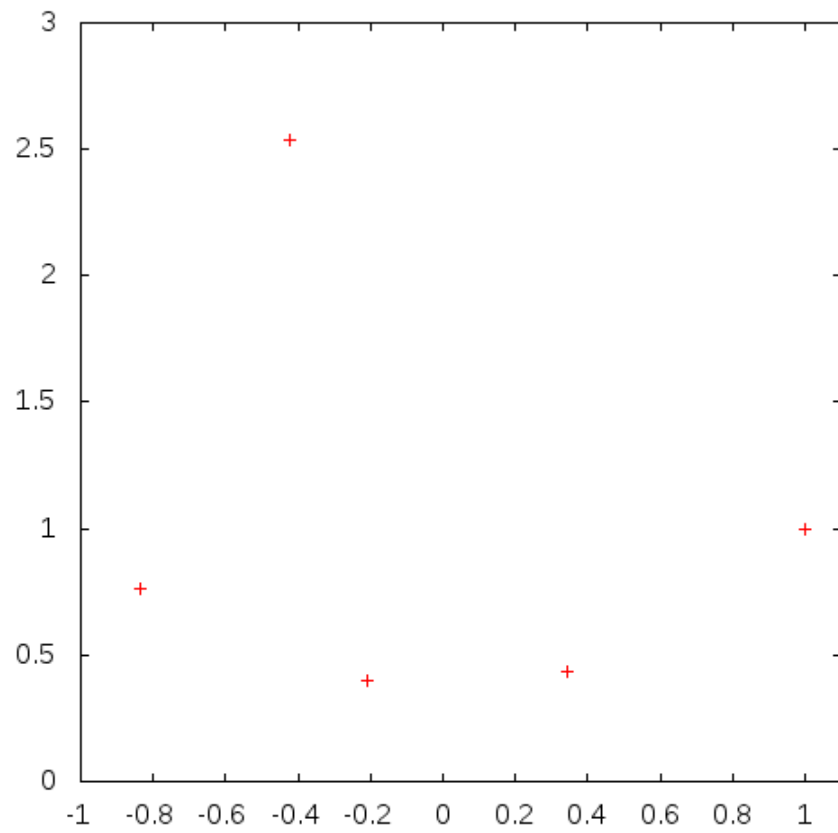


FIGURE 1 – L'itération de l'éq. (1) pour $\theta = 72, 144, 216$ et 288 degrés.

Démonstration. La démonstration est constructive : L'éq. (2) peut être écrite comme

$$(z_n z_0 + 1) \sin(n\theta) + (z_n - z_0) \cos(n\theta) = 0 \quad (10)$$

qui représente deux équations, en variables réelles :

$$\begin{aligned} (x_n x_0 - y_n y_0 + 1) \sin(n\theta) + (x_n - x_0) \cos(n\theta) &= 0 \\ (y_n x_0 + x_n y_0) \sin(n\theta) + (y_n - y_0) \cos(n\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Chacune de ces équations donne une expression de $\sin(n\theta)/\cos(n\theta) = \tan(n\theta)$; les deux expressions doivent, bien entendu, être cohérentes :

$$\frac{\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)} = -\frac{x_n - x_0}{x_n x_0 - y_n y_0 + 1} = \frac{\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)} = -\frac{y_n - y_0}{y_n x_0 + x_n y_0} \quad (12)$$

Cette identification implique que

$$x_n^2 y_0 + y_n^2 y_0 - y_n (x_0^2 + y_0^2 + 1) + y_0 = 0 \quad (13)$$

Cette équation doit être valable quelle que soit la valeur de n , en particulier, $n = 0$. On trouve immédiatement que, pour $n = 0$, elle prend la forme

$$y_0 (x_0^2 + y_0^2 - x_0^2 - y_0^2 - 1 + 1) = 0 \quad (14)$$

quelle que soit la valeur de y_0 .

Maintenant on écrit éq. (13) comme suit :

$$\begin{aligned} y_0 \left(x_n^2 + y_n^2 - 2y_n \frac{x_0^2 + y_0^2 + 1}{2y_0} + 1 \right) &= 0 \Leftrightarrow \\ y_0 \left(x_n^2 + \left(y_n - \frac{x_0^2 + y_0^2 + 1}{2y_0} \right)^2 + 1 - \left(\frac{x_0^2 + y_0^2 + 1}{2y_0} \right)^2 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

On laisse de côté le cas $y_0 = 0$, alors, le deuxième facteur doit s'annuler :

$$x_n^2 + \left(y_n - \frac{x_0^2 + y_0^2 + 1}{2y_0} \right)^2 = \left(\frac{x_0^2 + y_0^2 + 1}{2y_0} \right)^2 - 1 \quad (16)$$

qui est l'équation d'un cercle, de centre $(X, Y) = (0, (x_0^2 + y_0^2 + 1)/(2y_0))$ et de rayon

$$R^2 = \left(\frac{x_0^2 + y_0^2 + 1}{2y_0} \right)^2 - 1 \quad (17)$$

pourvu que le membre de droite soit non-négatif pour toute valeur réelle des variables x_0 et y_0 —et $y_0 \neq 0$.

En effet, on note qu'il est la différence de deux carrés, alors :

$$\left(\frac{x_0^2 + y_0^2 + 1}{2y_0}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4y_0^2}(x_0^2 + y_0^2 + 1 + 2y_0)(x_0^2 + y_0^2 + 1 - 2y_0) = \frac{1}{4y_0^2}(x_0^2 + (y_0 + 1)^2)(x_0^2 + (y_0 - 1)^2) \geq 0 \quad (18)$$

pourvu que $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq \pm 1$.

On note que, pour le cas du point de départ $(x_0, y_0) = (1, 1)$, le centre est $(X, Y) = (0, 3/2)$ et le rayon $R = \sqrt{5}/2$. $\square$

3 La répartition des sommets des polygones sur le cercle

Maintenant on va s'intéresser sur la répartition des sommets du polygone, défini par les points $\{z_n\}$.

Dans la fig. 2 on affiche les sommets pour $k = 5, 71$ et 72 . On remarque que les sommets ne sont pas uniformément répartis sur le cercle et l'on cherche à modéliser ceci.

Le fait que les points $z_n = x_n + iy_n$ se trouve sur le cercle, défini par les équations (16) et (17) implique que

$$\begin{aligned} x_n &= X + R \cos \phi_n \\ y_n &= Y + R \sin \phi_n \end{aligned} \quad (19)$$

où la phase ϕ_n est donnée par l'expression

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{y_n - Y}{x_n - X} \quad (20)$$

Cette expression définit, en fait, ϕ_n comme fonction de θ_n . Maintenant les valeurs de θ_n sont uniformément répartis dans l'intervalle $0 \leq n \leq k$. Par conséquent, si ϕ_n était donnée par une expression de la forme

$$\phi_n = 2\pi \frac{n}{k} + \phi_0 \quad (21)$$

alors les sommets seraient uniformément répartis. Tout écart de la droite est, ainsi, une indication d'une répartition non-uniforme.

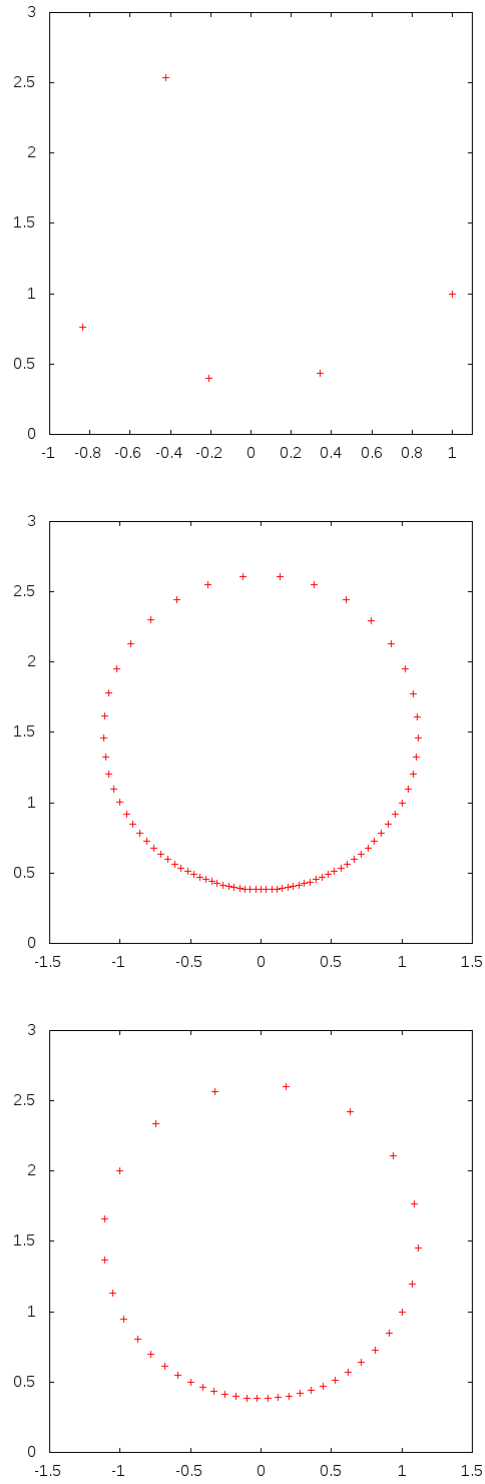


FIGURE 2 – Les sommets du pentagone ($k = 5$), du 71-agone ($k = 71$) et du 72-agone ($k = 72$), générés par la suite $\{z_n\}$. On note que les sommets ne sont pas uniformément répartis sur le cercle.

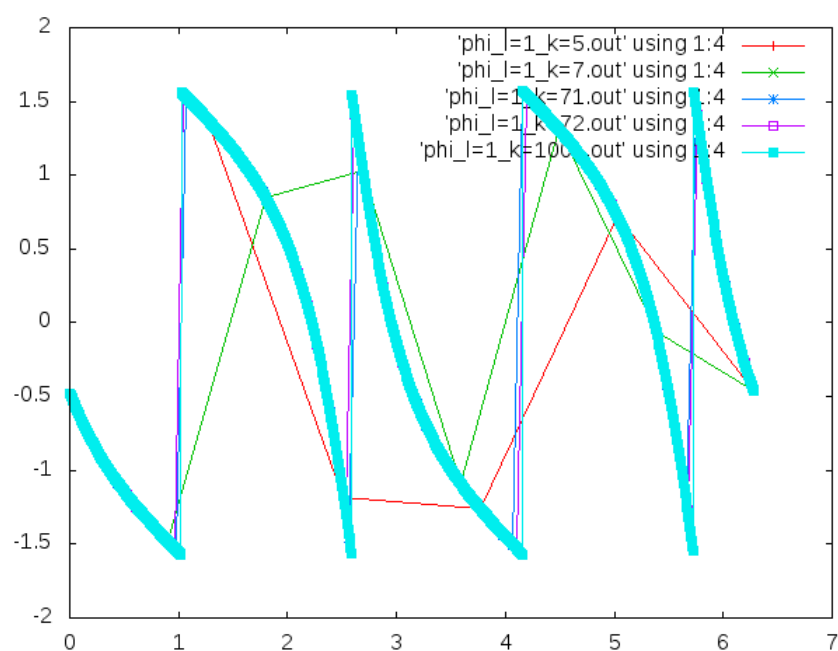


FIGURE 3 – La phase, ϕ_n , comme fonction de l'angle du sommet $\theta_n = 2\pi n/k, n = 0, 1, 2, \dots, k$, pour $k = 5, 7, 71, 72$ et 1001.

On trace l'éq. (20) dans la fig. 3. On peut noter que la courbe $\phi_n(\theta_n)$ n'est pas une droite—mais elle affiche un comportement périodique! En plus, on remarque que les points pour $k = 71, 72, 1001$ semblent appartenir à la même courbe.

On affiche dans la fig. 4 les courbes pour $k = 5, 17, 29$ et 41 à part des $k = 7, 11, 43$ pour essayer de mettre en évidence s'il y aurait une différence entre k premier de la forme $4q - 1$ et $4q + 1$. On note que $k = 5$ semble se comporter différemment des autres.

4 Les domaines obscurs

On va, maintenant, s'intéresser, au cas, où θ n'est pas constant, mais change, en fonction de l'indice de l'itération. Le cas le plus simple c'est lorsque θ prend un nombre fini de valeurs.

Le premier cas est si $\theta = \theta_0 = 2\pi l_0/k_0$, lorsque n est pair et $\theta = \theta_1 = 2\pi l_1/k_1$, lorsque n est impair. Le code est affiché dans l'annexe B.

Ce qui mérite d'être remarqué est comment est réalisé le choix pour la valeur de θ . La ligne pertinente du code Python dans l'annexe B est

```
theta = (i%2)*theta1 + (1-(i%2))*theta0
```

Dans cette ligne $i\%2$ exprime le reste de la division de l'entier i par 2; qui ne peut prendre, donc, que deux valeurs, 0, lorsque i est pair et 1, lorsqu'il est impair. Si i est pair, on se rend compte que $\theta = \theta_0$ et, si i est impair, on trouve que $\theta = \theta_1$.

Dans le cas où $\theta = 2\pi l/k$, quelle que soit l'indice, on a trouvé que, puisque la solution de la récurrence était une fonction de $n\theta = 2\pi nl/k$, alors, la suite était périodique, avec période k . Dans le cas actuel on peut montrer que la suite est périodique, aussi, mais la période est différente :

Théorème 3. *La solution de la récurrence, z_n , lorsque $\theta = \theta_0 = 2\pi l_0/k_0$, pour n pair et $\theta = \theta_1 = 2\pi l_1/k_1$, pour n impair est donnée par l'expression*

$$z_{2n} = \frac{z_0 \cos[n(\theta_0 + \theta_1)] - \sin[n(\theta_0 + \theta_1)]}{z_0 \sin[n(\theta_0 + \theta_1)] + \cos[n(\theta_0 + \theta_1)]} \quad (22)$$

Par conséquent, la période de la suite est

$$z_T = z_0 \Leftrightarrow T = 2k_0k_1 \quad (23)$$

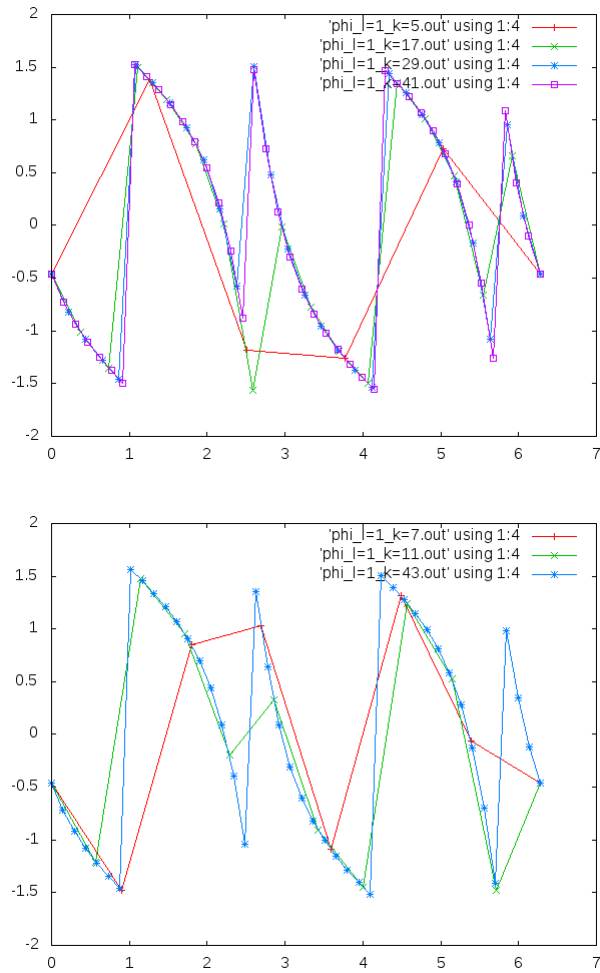


FIGURE 4 – Les courbes $\phi_n(\theta_n)$, pour $k = 5, 17, 29, 41$ et $k = 7, 11, 43$. On note que $k = 5$ a un comportement à part.

Démonstration. Fournir la démonstration □

Corollaire 1. Les éléments d'ordre impair, z_{2n+1} sont donnés par l'expression

$$z_{2n+1} = \frac{z_{2n} \cos \theta_1 - \sin \theta_1}{z_{2n} \sin \theta_1 + \cos \theta_1} \quad (24)$$

On trace le résultat, lorsque $k_0 = 5, l_0 = 1, k_1 = 7, l_1 = 1$ et $z_0 = (1, 1)$, dans la fig. 5. On remarque l'apparition d'une région ovale "blanche". On

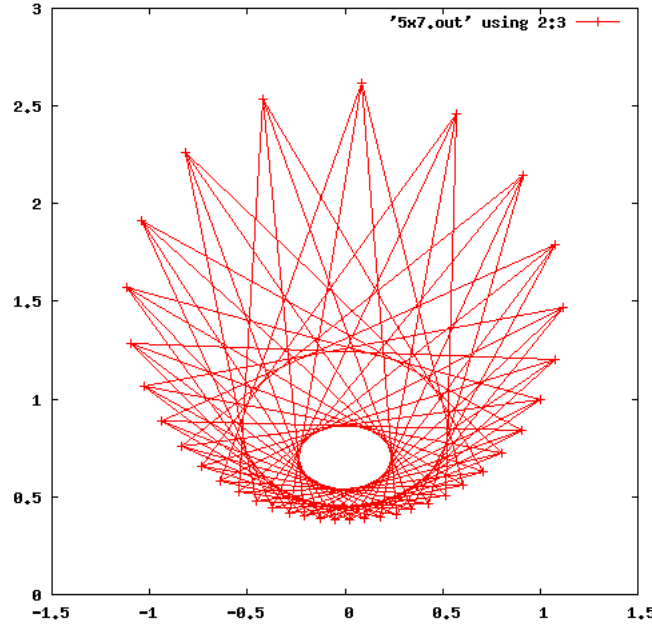


FIGURE 5 – Les éléments de la suite, $\{z_n\}$, pour $k_0 = 5, l_0 = 1, k_1 = 7, l_1 = 1$ et $z_0 = (1, 1)$. On remarque l'apparition d'une région ovale blanche, c.à.d. qui n'est pas traversée par les lignes rouges, qui indiquent la trajectoire. Cette région ovale est, alors, "invisible".

cherche à comprendre comment sa taille dépend des autres paramètres, c.à.d l_0 et l_1 . On sait que

$$\theta_0 + \theta_1 = 2\pi \frac{l_0 k_1 + l_1 k_0}{k_0 k_1} \quad (25)$$

donc on a intérêt à ce que l_0 et l_1 n'aient pas de facteurs communs entre eux.

On affiche, alors, dans la fig. 6, le cas, où $l_0 = 2$ et $l_1 = 3$. et l'on peut

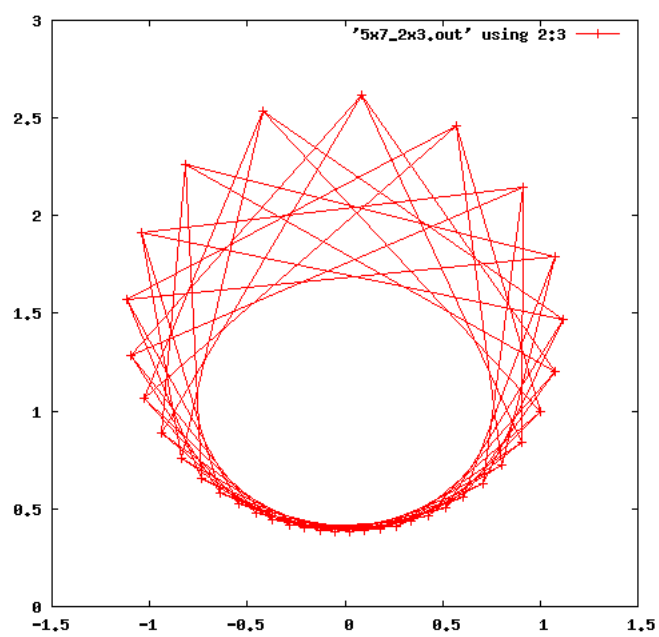


FIGURE 6 – Les éléments de la suite, $\{z_n\}$, pour $k_0 = 5, l_0 = 2, k_1 = 7, l_1 = 3$ et $z_0 = (1, 1)$. .

constater que la région ovale est beaucoup plus grande.

Mais il se passe quelque chose assez intéressante, si l'on choisit $l_0 = 2$ et $l_1 = 5$ —cf. fig. 7 : On remarque que l'ovale “verte” est beaucoup plus

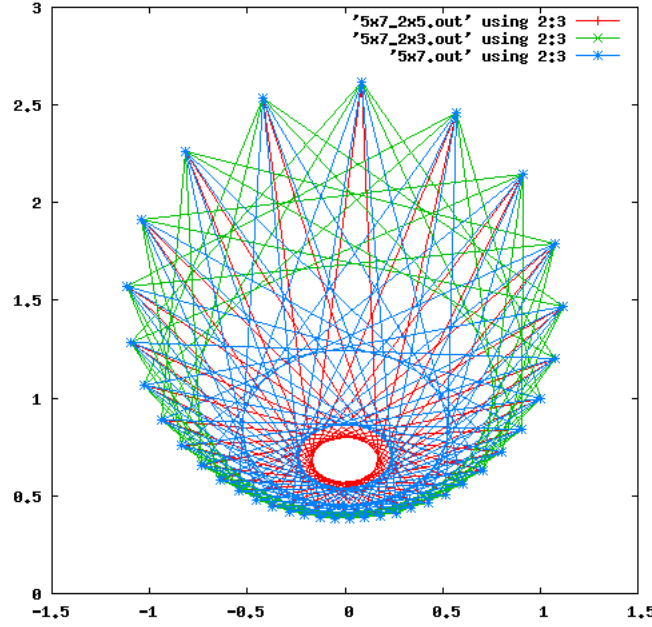


FIGURE 7 – Les éléments de la suite $\{z_n\}$, pour $(l_0, l_1) = (2, 3), (2, 5)$ et $(1, 1)$ et $z_0 = (1, 1)$.

grande que l'ovale “rouge” ; mais l'ovale “bleue” a une taille entre les deux. Ce qui pousse à réfléchir sur la question de quel est la manière “naturelle” d'ordonner les paires (l_0, l_1) , d'après la taille de l'ovale.

Une autre question est que se passe-t-il, lorsque k_0 et k_1 —plus précisément leur produit $k_0 k_1$ —augmente.

Un début de réponse est présentée dans la fig. 8, où l'on affiche le voisinage de la région “ovale”, pour $l_0 = l_1 = 1$, $k_0 = 5$ et $k_1 = 17, 29, 37, 41$, c.à.d. des nombres premiers de la forme $4q + 1$.

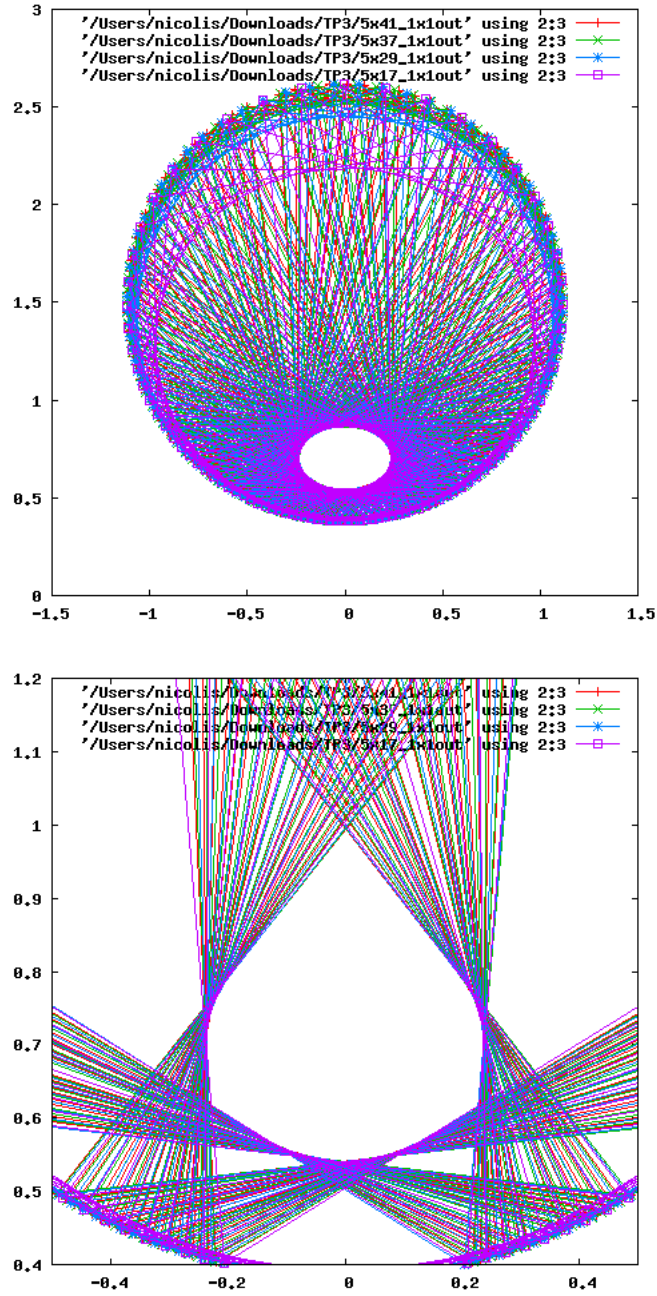


FIGURE 8 – Le voisinage de la région “ovale”, pour $k_0 = 5$ et $k_1 = 17, 29, 37, 41$.

A Le code Python

Dans cet annexe on présente le code Python, qui produit les données, affichées dans la fig. 1.

Le code a la structure suivante :

```
from math import sin, cos, radians

theta = input()
theta = radians(theta)

x = input()
y = input()

z = complex(x,y)

i = 0

print i, z.real, z.imag

k = input()

for i in range(1,k):
    z1 = (cos(theta)*z-sin(theta))/(sin(theta)*z+cos(theta))
    print i, z1.real, z1.imag
    z =z1
```

B Le code Python pour les domaines obscurs

Dans cet annexe on affiche le code pour le cas, où $\theta = \theta_0 = 2\pi, l_0/k_0$

```
from math import sin, cos, acos, atan
```

```
k0 = input()
l0 = input()

theta0 = 2.0*acos(-1.0)*l0/k0
```

```

k1 = input()
l1 = input()

theta1 = 2.0*acos(-1.0)*l1/k1

x = input()
y = input()

Xcentre = 0.0
Ycentre = (x**2+y**2+1.0)/(2.*y)

z = complex(x,y)

i = 0

print i, z.real, z.imag

for i in range(1,2*k0*k1+1):
    theta = (i%2)*theta1 + (1-(i%2))*theta0
    z1 = (cos(theta)*z-sin(theta))/(sin(theta)*z+cos(theta))
    print i, z1.real, z1.imag
    z =z1

```