TD à la maison : Electrodynamique classique

Stam Nicolis [1]

CNRS–Institut Denis Poisson (UMR7013)
Université de Tours, Université d'Orléans
Parc Grandmont, 37200 Tours, France

Résumé

Exercices pour approfondir certains aspects de l'électrodynamique classqiue.

1. E-Mail : Stam.Nicolis@lmpt.univ-tours.fr

1 Exercice sur les transformations de Lorentz

Soit la transformation de Lorentz

$$\begin{aligned} t' &= t\cosh\phi + x\sinh\phi \\ x' &= t\sinh\phi + x\cosh\phi \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1}$$

On définit $x'^{\mu} \equiv (t', x', y', z')$ et $x^{\nu} \equiv (t, x, y, z)$.

Sous forme matricielle :

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\phi) x^{\nu} \tag{2}$$

où

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}(\phi) \equiv \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

On introduit la matrice

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Parmi les questions qui suivent les questions à traiter dans le compte-rendu sont les 8-10 et la 12. Les autres servent pour se familiariser avec le formalisme.

1. Montrer que
$$\Lambda(\phi)^{\mathrm{T}} \eta \Lambda(\phi) = \eta \tag{5}$$
On note que $\Lambda(\phi)^{\mathrm{T}} = \Lambda(\phi)$.
2. Montrer que
$$\Lambda(\phi)\Lambda(\phi') = \Lambda(\phi + \phi') \Rightarrow \Lambda(\phi)^{-1} = \Lambda(-\phi) \tag{6}$$
3. Montrer que
$$x^{\mu}\eta_{\mu\nu}x^{\nu} = x'^{\mu}\eta_{\mu\nu}x'^{\nu} \tag{7}$$
par calcul directe ainsi qu'en appliquant le résultat de la question précédente.

4. La matrice $\eta^{\mu\nu}$ est la matrice inverse de $\eta_{\mu\nu}$:

$$\sum_{\nu=0}^{3} \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda} \tag{8}$$

   où $\delta^{\mu}_{\lambda} = 1$ si $\lambda = \mu$ et 0 sinon.
   Ecrire l'expression pour $\eta^{\mu\nu}$.

5. Montrer que l'opérateur d'Alembertien

$$\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \nabla'^2 \tag{9}$$

   peut être écrit comme

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \eta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu \tag{10}$$

   Déduire que la quantité $\partial/\partial x_\mu \equiv \partial^\mu = (\partial/\partial t, -\nabla)$. Comparer avec $x^\mu = (t, x, y, z)$. D'où vient le signe $-$?

6. Montrer que, si $(\rho(x), \mathbf{J}(\mathbf{x})) \equiv J^\mu(x)$, se transforme comme

$$J'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu(\phi)J^\nu(x) = \Lambda^\mu_\nu(\phi)J^\nu(\Lambda^{-1}x') \tag{11}$$

   alors

$$\mathrm{div} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{div}' \cdot \mathbf{J}' + \frac{\partial\rho'}{\partial t'} = 0 \tag{12}$$

   et que

$$\mathrm{div} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \partial_\mu\eta^{\mu\nu}J_\nu = \partial^\mu\eta_{\mu\nu}J^\nu \tag{13}$$

7. Retrouver les expressions pour le champ magnétique $\mathbf{B} = \mathrm{rot} \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$ et le champ électrique $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\Phi - \dot{\mathbf{A}} = -\nabla\Phi - \dot{\mathbf{A}}$ à partir des composantes de $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Déterminer les expressions de $F^{\mu\nu}$.

8. A partir des transformations de Lorentz

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} \tag{14}$$

   retrouver les transformations des composantes des champs électrique et magnétique, qui expriment l'invariance des équations de Maxwell sous transformations de Lorentz.

9. Montrer que

$$\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} = \text{const} \times (\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) \tag{15}$$

est invariant sous transformations de Lorentz. Déterminer la valeur de la constante.

10. Montrer que

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \tag{16}$$

est invariant sous transformations de Lorentz. Montrer à partir de $\mathbf{E} = -\text{grad}\Phi - \dot{\mathbf{A}}$ et $\mathbf{B} = \text{rot}\times\mathbf{A}$ que $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ est une somme de dérivées par rapport aux coordonnées d'espace et du temps.

11. **OPTIONNELLE** : Montrer que

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = \text{const} \times \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\left(A_\nu\partial_\rho A_\sigma\right) \tag{17}$$

Trouver la valeur de la constante.

12. Si l'on définit l'action du champ électromagnétique par l'expression

$$S[A] = \int d^4x\,\left\{-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} + \frac{\alpha}{2}\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right)^2 - k\eta^{\mu\nu}J_\mu A_\nu\right\} \tag{18}$$

déterminer la valeur des constantes α et k pour que les équations d'Euler–Lagrange,

$$\delta S \equiv S[A+\delta A]-S[A] = \int d^4x\,\delta A_\mu\frac{\delta S[A]}{\delta A_\mu}+O((\delta A)^2) = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta S}{\delta A_\nu} = 0 \tag{19}$$

prennent la forme

$$\Box A_\nu = J_\nu \tag{20}$$