Les transformations de Möbius

Stam Nicolis [1]

CNRS–Institut Denis Poisson (UMR7013)
Université de Tours, Université d'Orléans
Parc Grandmont, 37200 Tours, France

Résumé

Quelques exemples des transformations de Möbius.

1. E-Mail : Stam.Nicolis@lmpt.univ-tours.fr

Table des matières

1 Introduction

Les transformations de Möbius sont définies par

$$z_{n+1} = \frac{az_n + n}{cz_n + d} \tag{1}$$

Un cas particulier est celui où $ad - bc = 1$. Cette relation peut être représentée par $a = \cos\theta = d, b = -c = -\sin\theta$.

Si $\theta/360 = l/k$, avec $l, k \in \mathbb{N}$, l'itération est périodique ; sinon elle est non-périodique. Lorsque l'on travaille avec l'ordinateur, qui ne représente que des nombres rationnels, l'itération est, toujours, périodique–mais la période peut être très longue.

Un exemple est donné en fig. 1

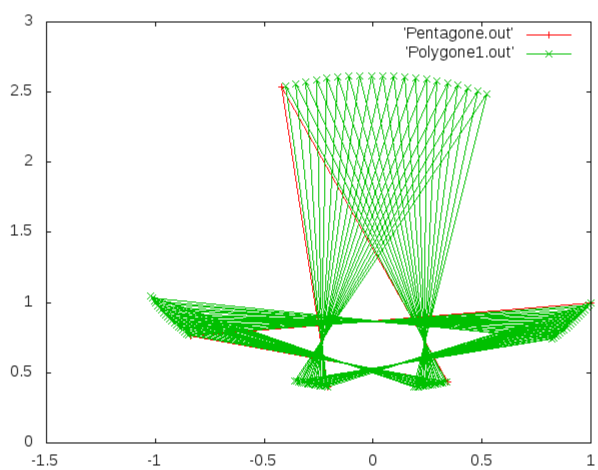


FIGURE 1 – L'itération de l'éq. (1) pour $\theta = 72$ et $\theta = 72.1$ degrés.

Une généralisation de cette tansformation est définie par deux angles, $\theta_0 = 360 \times l_0/k_0$ et $\theta_1 = 360 \times l_1/k_1$, avec k_0 et k_1 sans facteurs communs (indiqué par $(k_0, k_1) = 1$).

La transformation de Möbius, alors, est donnée par

$$z_{n+1} = \frac{z_n \cos\theta_n - \sin\theta_n}{z_n \sin\theta_n + \cos\theta_n} \tag{2}$$

Où l'expression pour l'angle θ_n est la suivante :

$$\theta_n = ((1 - n\%2))\theta_0 + (n\%2)\theta_1 \tag{3}$$

et $n\%2$ indique le reste de la division de n par 2.

Dans la figure 2 on affiche le dessin correspondant lorsque l'on applique la transformation avec θ_0 les instants pairs et avec θ_1 les instants impairs. On peut généraliser cette transformation, pour le cas de trois angles, θ_0, θ_1 et θ_2, selon le reste de la division de n par 3.

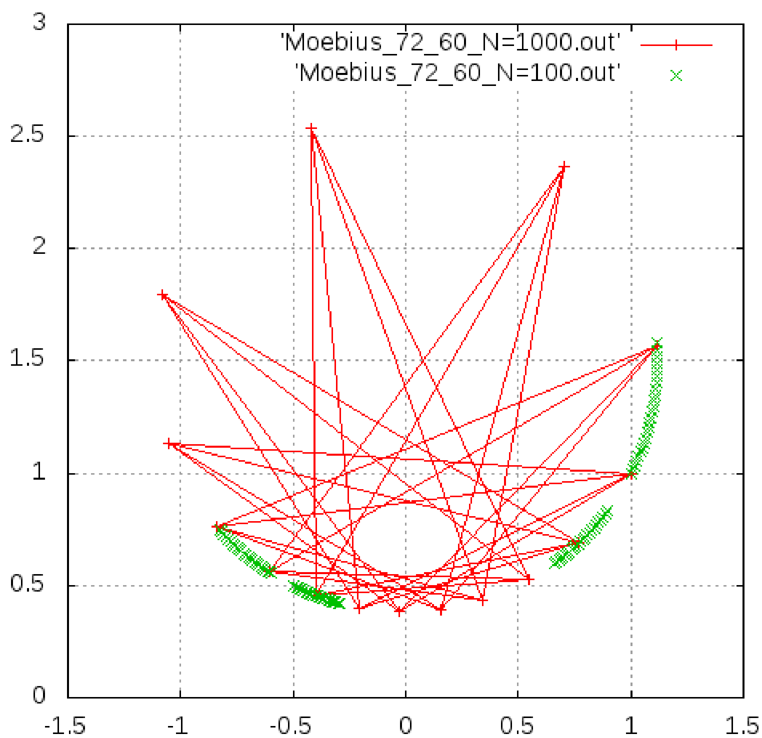


FIGURE 2 – L'itération de l'éq. (1) pour $\theta_0 = 72$ et $\theta_1 = 60$ degrés.

L'expression pour θ_n est, alors, donnée par

$$\theta_n = c_0\theta_0 + c_1\theta_1 + c_2\theta_2 \tag{4}$$

avec

$$\begin{array}{l} c_0 = 1 - (((n\%3)\&1)\hat{}(((n\%3)\&2) >> 1)) \\ c_1 = (n\%3)\%2 \\ c_2 = c2 = (n\%3) >> 1 \end{array} \tag{5}$$

On trouve la trajectoire, affichée dans la figure 3.

2 Les polygones étoilés et d'autres

On peut montrer que la solution de l'itération, lorsque l'on itère les angles selon la suite $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{K-1}$ est donnée par l''expression

$$z_{Kn} = \frac{z_0 \cos[(\theta_0 + \theta_1 + \cdots \theta_{K-1})] - \sin[(\theta_0 + \theta_1 + \cdots \theta_{K-1})]}{z_0 \sin[(\theta_0 + \theta_1 + \cdots \theta_{K-1})] + \cos[(\theta_0 + \theta_1 + \cdots \theta_{K-1})]} \tag{6}$$

Par conséquent, le mouvement sera périodique lorsque $z_{KN} = z_0$. Alors

$$N\,(\theta_0 + \theta_1 + \cdots \theta_{K-1}) = 2\pi M$$

On essaie de générer des polygones, étoilés et non–étoilés. Quelques résultats sont affichés dans la fig. 4. ainsi que dans la fig. 5.

3 Du plan à la sphère

On peut faire correspondre un point $z = (x, y)$, du plan complexe à un point (X, Y, Z) de la sphère de rayon 1 et de centre $(0, 0, 0)$, par les équations

$$\begin{array}{l} x = \dfrac{X}{1-Z} \\ y = \dfrac{Y}{1-Z} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} X = \dfrac{2x}{x^2+y^2+1} \\ Y = \dfrac{2y}{x^2+y^2+1} \\ Z = \dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \end{array} \tag{7}$$

Ces équations donnent lieu au dessin suivant–cf.fig. 6 Si l'on applique la transformation de Möbius en employant trois angles, θ_0, θ_1 et θ_2, à tour de rôle, on trouve le dessin de la fig. 7.

4 Pistes à suivre

On peut formuler les conjectures suivante :

Conjecture 1. *Les points générés par le récurrénce de Möbius, étudiée ici, appartiennent au cercle*

$$x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

Conjecture 2. *Les images de ces points, sous la projection stéréographique,*

$$X = \frac{2x}{x^2+y^2+1} \quad Y = \frac{2y}{x^2+y^2+1} \quad Z = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

appartiennent à un cercle, résultat de l'intersection de la sphère $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ *et du plan* $Y = 2/3$*. Ce qui veut dire que*

$$2y = \frac{2}{3}\left(x^2 + y^2 + 1\right)$$

On peut appuyer l'idée de la validité de la conjecture 1 par la figure 8. La commande de `gnuplot`, qui permet de tracer le cercle est

```
gnuplot> set object circle  at 0,1.5 size sqrt(5.)/2.
gnuplot> replot
```

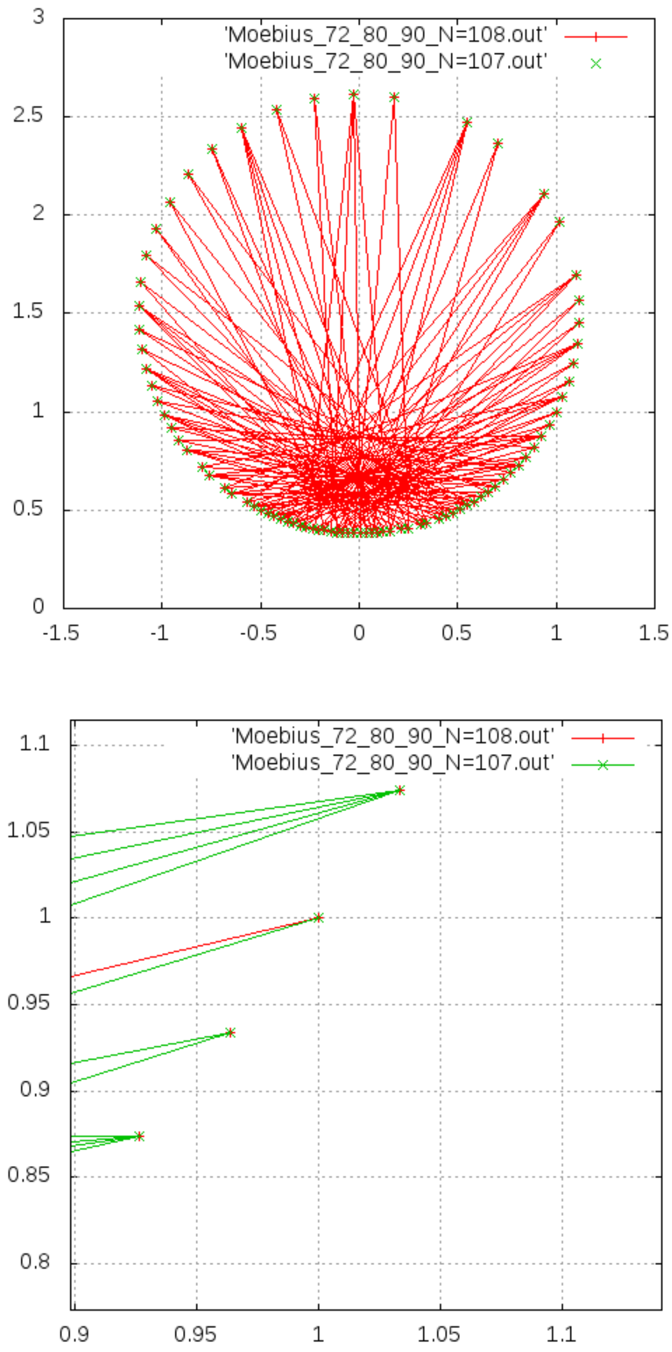
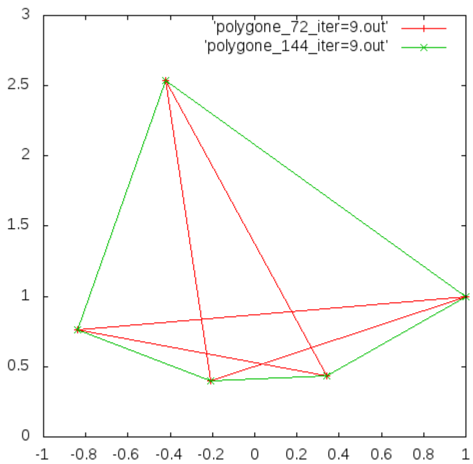


FIGURE 3 – La trajectoire pour $\theta_0 = 72, \theta_1 = 80$ et $\theta_2 = 90$ degrés. La période est égale à $T = 108$. On affiche la comparaison avec $N = 107$ itérations.



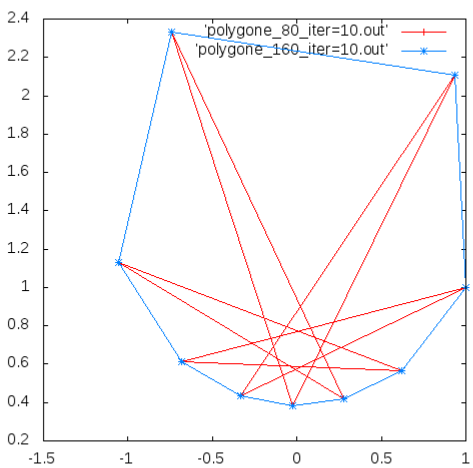


FIGURE 4 – Les “pentagones” et “neufagones”.

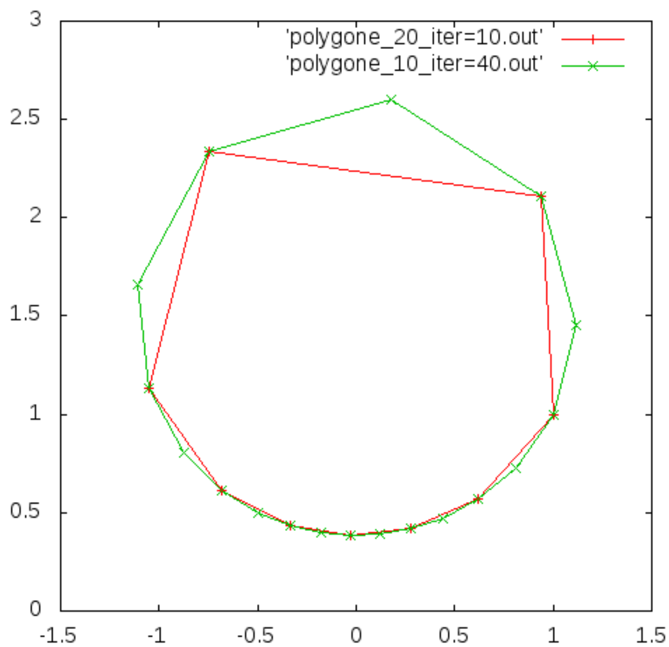


Figure 5 – Le 10-agone et le 20-agone.

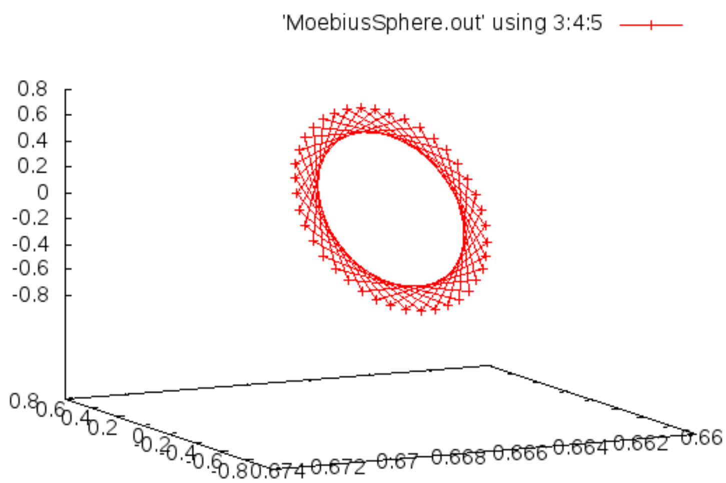


FIGURE 6 – L'image de la récurrence de Möbius sur la sphère, pour $\theta = 40,5$ degrés. On note que ce cercle se trouve sur le plan $Y = 2/3$.

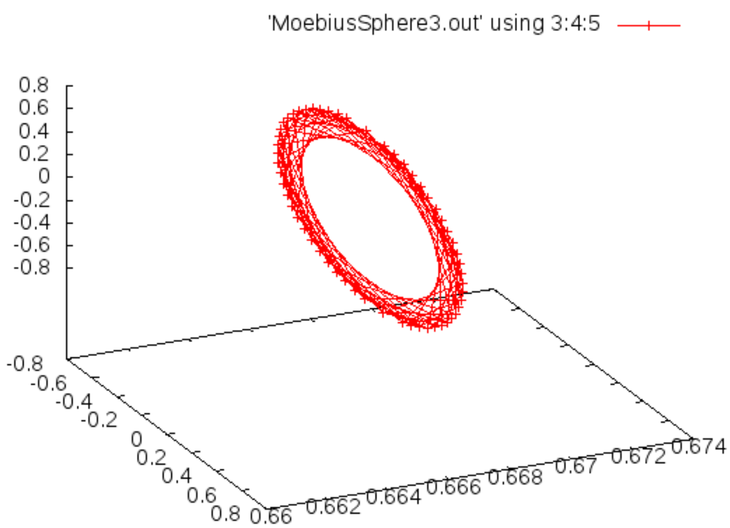


FIGURE 7 – L'image de la récurrence sur la sphère, avec $\theta_0 = 30, \theta_1 = 42$ et $\theta_2 = 21$ degrès.

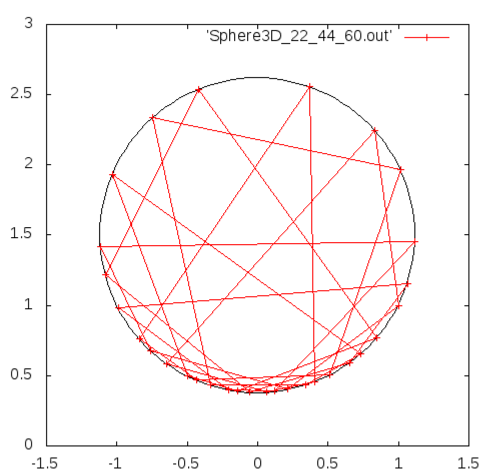


FIGURE 8 – Les itérés de Möbius se trouvent sur le cercle.