

Les transformations de Möbius

Stam Nicolis¹

*CNRS–Institut Denis Poisson (UMR7013)
Université de Tours, Université d'Orléans
Parc Grandmont, 37200 Tours, France*

Résumé

Quelques exemples des transformations de Möbius.

1. E-Mail : Stam.Nicolis@lmpt.univ-tours.fr

Table des matières

1	Introduction	2
2	Les polygones étoilés et d'autres	4

1 Introduction

Les transformations de Möbius sont définies par

$$z_{n+1} = \frac{az_n + n}{cz_n + d} \quad (1)$$

Un cas particulier est celui où $ad - bc = 1$. Cette relation peut être représentée par $a = \cos \theta = d, b = -c = -\sin \theta$.

Si $\theta/360 = l/k$, avec $l, k \in \mathbb{N}$, l'itération est périodique ; sinon elle est non-périodique. Lorsque l'on travaille avec l'ordinateur, qui ne représente que des nombres rationnels, l'itération est, toujours, périodique—mais la période peut être très longue.

Un exemple est donné en fig. 1

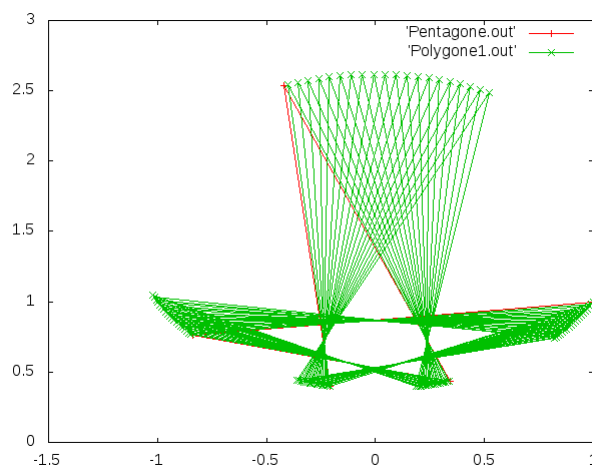


FIGURE 1 – L'itération de l'éq. (1) pour $\theta = 72$ et $\theta = 72.1$ degrés.

Une généralisation de cette transformation est définie par deux angles, $\theta_0 = 360 \times l_0/k_0$ et $\theta_1 = 360 \times l_1/k_1$, avec k_0 et k_1 sans facteurs communs (indiqué par $(k_0, k_1) = 1$).

La transformation de Möbius, alors, est donnée par

$$z_{n+1} = \frac{z_n \cos \theta_n - \sin \theta_n}{z_n \sin \theta_n + \cos \theta_n} \quad (2)$$

Où l'expression pour l'angle θ_n est la suivante :

$$\theta_n = ((1 - n\%2))\theta_0 + (n\%2)\theta_1 \quad (3)$$

et $n\%2$ indique le reste de la division de n par 2.

Dans la figure 2 on affiche le dessin correspondant lorsque l'on applique la transformation avec θ_0 les instants pairs et avec θ_1 les instants impairs. On peut généraliser cette transformation, pour le cas de trois angles, θ_0 , θ_1

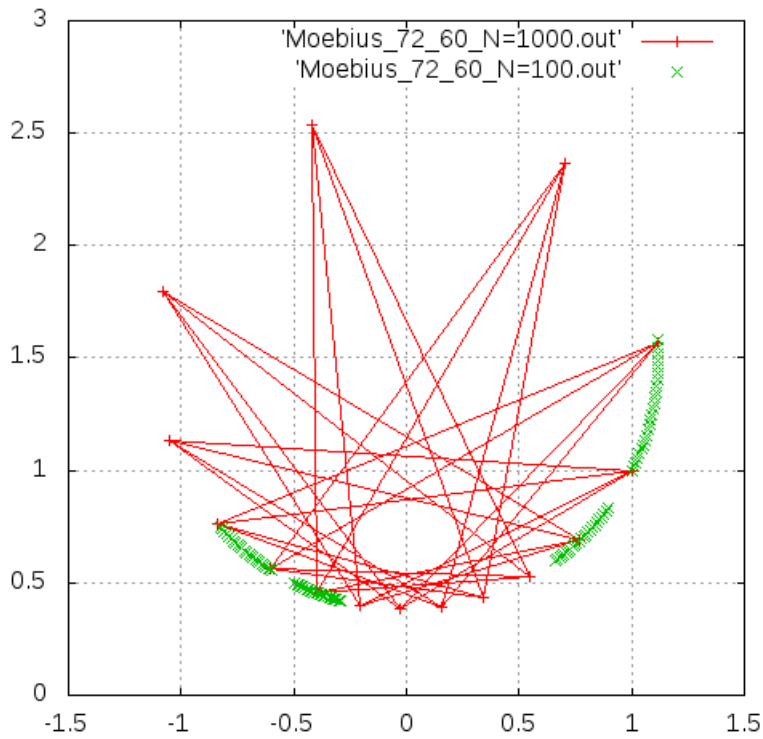


FIGURE 2 – L'itération de l'éq. (1) pour $\theta_0 = 72$ et $\theta_1 = 60$ degrés.

et θ_2 , selon le reste de la division de n par 3.

L'expression pour θ_n est, alors, donnée par

$$\theta_n = c_0\theta_0 + c_1\theta_1 + c_2\theta_2 \quad (4)$$

avec

$$\begin{aligned}c_0 &= 1 - (((n\%3)\&1)\wedge(((n\%3)\&2) \gg 1)) \\c_1 &= (n\%3)\%2 \\c_2 &= c2 = (n\%3) \gg 1\end{aligned}\tag{5}$$

On trouve la trajectoire, affichée dans la figure 3.

2 Les polygones étoilés et d'autres

On peut montrer que la solution de l'itération, lorsque l'on itère les angles selon la suite $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{K-1}$ est donnée par l'expression

$$z_{Kn} = \frac{z_0 \cos[(\theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_{K-1})] - \sin[(\theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_{K-1})]}{z_0 \sin[(\theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_{K-1})] + \cos[(\theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_{K-1})]}\tag{6}$$

Par conséquent, le mouvement sera périodique lorsque $z_{KN} = z_0$. Alors

$$N(\theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_{K-1}) = 2\pi M$$

On essaie de générer des polygones, étoilés et non-étoilés. Quelques résultats sont affichés dans la fig. 4. ainsi que dans la fig. 5.

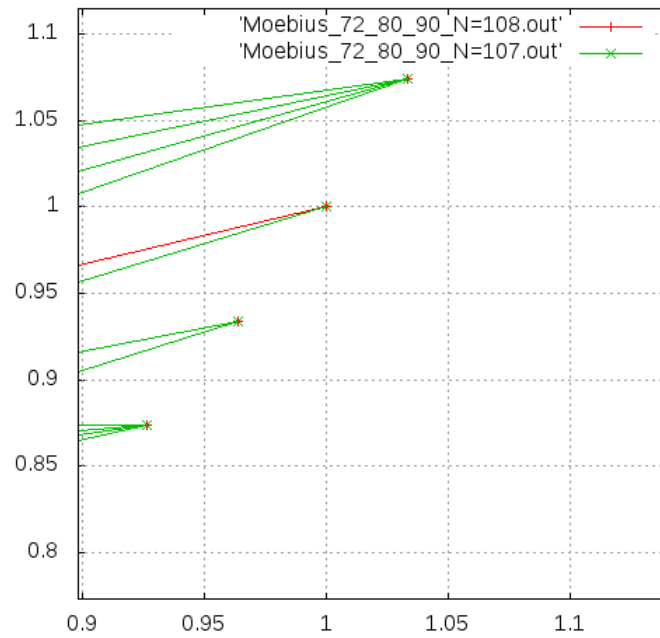
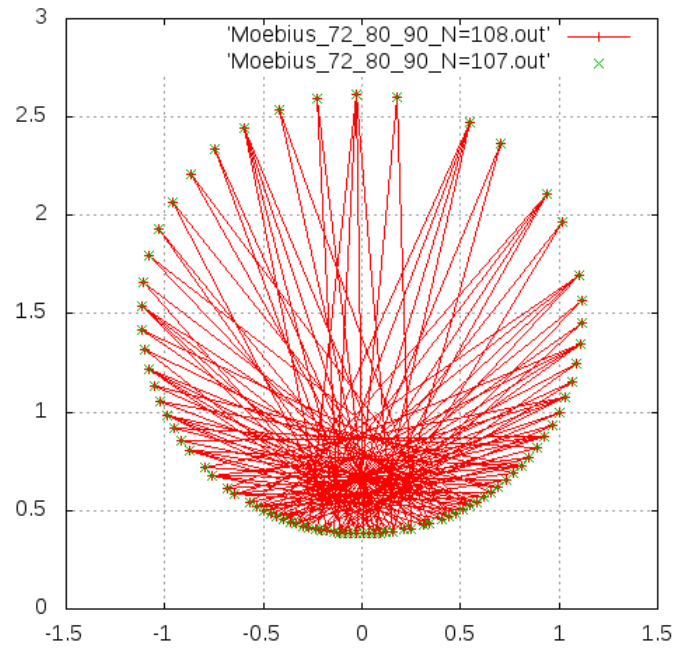


FIGURE 3 – La trajectoire pour $\theta_0 = 72, \theta_1 = 80$ et $\theta_2 = 90$ degrés. La période est égale à $T = 108$. On affiche la comparaison avec $N = 107$ itérations.

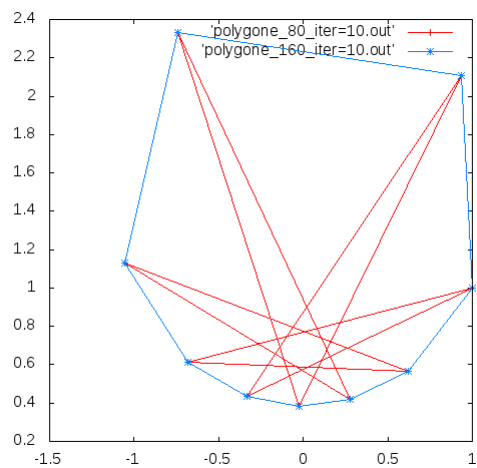
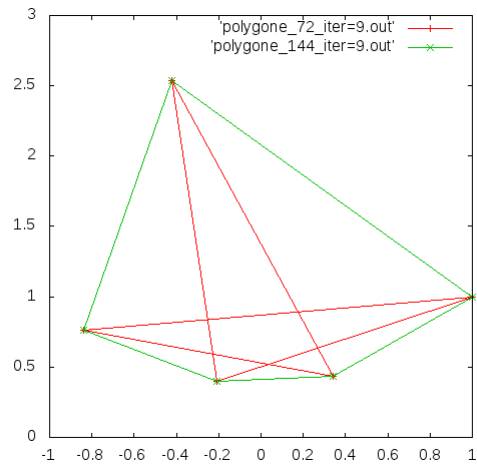


FIGURE 4 – Les “pentagones” et “neufagones”.

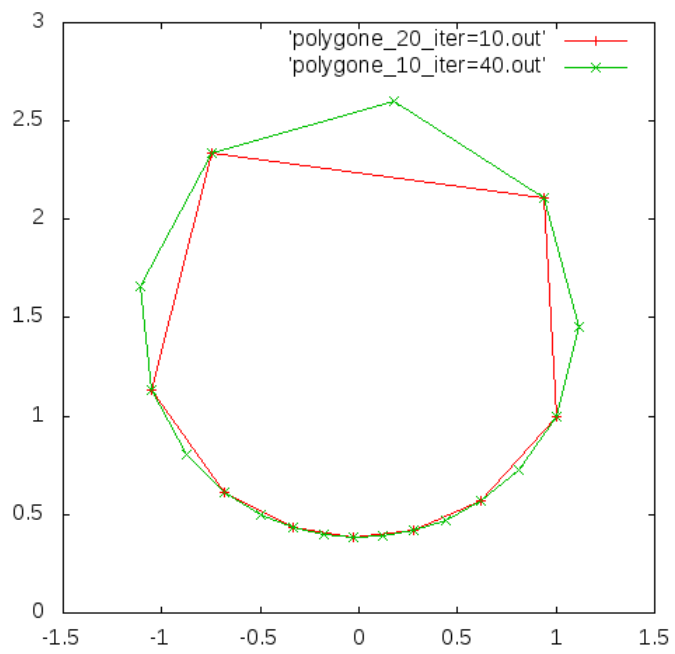


FIGURE 5 – Le 10-agone et le 20-agone.