v2.12
13 avril 2020

Sur le rayonnement d'une charge électrique ponctuelle

Stam Nicolis [1]
Institut Denis Poisson, Université de Tours, Université d'Orléans, CNRS
Parc Grandmont, Tours 37200, France

Résumé

On essaie d'expliquer la démarche esquissée dans le papier de Sidney Coleman.

1. E-Mail : Stam.Nicolis@lmpt.univ-tours.fr

Table des matières

1 Les équations du mouvement

eom

Les équations du mouvement d'une charge électrique ponctuelle sont déduites de l'action classique :

$$S[A,x]=\int dt\,\left[\frac{m_0}{2}\dot{x}_\mu\eta^{\mu\nu}\dot{x}_\nu-q\dot{x}_\mu\eta^{\mu\nu}A_\nu(x)\right]+\int d^4x\,\left[-\frac{1}{4}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}+\frac{\alpha}{2}(\partial_\mu\eta^{\mu\nu}A_\nu)^2\right] \tag{1}$$

Sclass

comme

$$\begin{array}{l} m_0\ddot{x}_\mu=qF_{\mu\nu}\dot{x}_\rho\eta^{\rho\nu}=q\left(\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)\right)\dot{x}_\rho\eta^{\rho\nu}\\ \Box A_\mu=q\dot{x}_\mu \end{array} \tag{2}$$

MaxwellL

pour une valeur particulière de α. (**Exercice** : Trouver cette valeur.)

Il faut bien comprendre que ces équations sont couplées : Le courant électrique $J_\mu(x)=q\dot{x}_\mu$.

La stratégie sera de résoudre la deuxième équation–qui est équivalente aux équations de Maxwell, dans la jauge de Lorenz–obtenir $A_\mu(x)$ comme fonction de la position $x_\mu(t)$ de la charge ponctuelle et, ainsi, obtenir une équation différentielle ordinaire pour la position $x_\mu(t)$.

Dans ce qui suit on va choisir les unités de la charge telles que $q=1$.

La solution de $\Box A_\nu=q\dot{x}_\nu\equiv J_\nu(x)$, où $J_\mu(x)$ est une fonction donnée de x, peut être obtenue par transformation de Fourier :

$$-k^2\widehat{A}_\nu(k)=\widehat{J}_\nu(k)\Leftrightarrow\widehat{A}_\nu(k)=-\frac{\widehat{J}_\nu(k)}{k^2} \tag{3}$$

Fouriers

Par conséquent $A_\mu(x)$ est donné par l'expression

$$A_\mu(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{-\mathrm{i}kx}\,\widehat{A}_\mu(k)=-\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{-\mathrm{i}kx}\frac{\widehat{J}_\mu(k)}{k^2}=-\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-\mathrm{i}kx}}{k^2}\int d^4x'\,e^{\mathrm{i}kx'}J_\mu(x') \tag{4}$$

Amux

On cherche à rendre cette expression concrète, pour pouvoir l'utiliser pour résoudre l'équation pour la trajectoire.

Les outils mathématiques nécessaires sont le calcul différentiel et intégral à plusieurs variables et le théorème des résidus.

2 La solution des équations du mouvement pour une source fixe et de taille bornée

eomsol

2.1 La solution des équations de Maxwell

eomMaxwell

Si l'on peut échanger l'ordre des intégrations, on obtient

$$A_\mu(x) = -\int d^4x' \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-\mathrm{i}k(x-x')}}{k^2}\right] J_\mu(x') \tag{5}$$

Amux1

Dans cette expression $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} \equiv \omega^2 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$ et $k(x-x') = \omega(t-t') - \mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$, puisque $k_\mu = (k_0, \mathbf{k}) = (\omega, \mathbf{k})$.

Pour poursuivre le calcul, une approche consiste à adopter un choix de référentiel, c.à.d. une séparation en ω et $\mathbf{k}$, écrire

$$\begin{gathered}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-\mathrm{i}k(x-x')}}{k^2} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,e^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{e^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}}{\omega^2 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}} = \\ \frac{1}{2}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{|\mathbf{k}|} \int \frac{d\omega}{2\pi}\,e^{\mathrm{i}\omega(t-t')}\left[\frac{1}{\omega-|\mathbf{k}|} - \frac{1}{\omega+|\mathbf{k}|}\right]\end{gathered} \tag{6}$$

contour

et reconnaître, dans les intégrales sur ω, des intégrales où l'on peut appliquer le théorème des résidus :

$$\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{e^{\mathrm{i}\omega(t-t')}}{\omega-|\mathbf{k}|} = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}|(t-t')}\Theta(t-t') \tag{7}$$

residue1

où $\Theta(t-t')$ est la fonction "marche de Heaviside, $\Theta(t-t') = 1$, pour $t > t'$, $1/2$, pour $t = t'$ et 0 pour $t < t'$.

De même

$$\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{e^{\mathrm{i}\omega(t-t')}}{\omega+|\mathbf{k}|} = \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}|\mathbf{k}|(t-t')}\Theta(t'-t) \tag{8}$$

residue2

Par conséquent

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-\mathrm{i}k(x-x')}}{k^2} = \frac{\mathrm{i}}{2}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{|\mathbf{k}|}\left[e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}|(t-t')}\Theta(t-t') - e^{-\mathrm{i}|\mathbf{k}|(t-t')}\Theta(t'-t)\right] \tag{9}$$

propagat

Restent les intégrales sur $\mathbf{k}$:(**Exercice** : Contrôler les signes)

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')+\mathrm{i}|\mathbf{k}|(t-t')}}{|\mathbf{k}|} = \int \frac{|\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}|\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\cos\theta+\mathrm{i}|\mathbf{k}|(t-t')}}{|\mathbf{k}|} = \\
&\int \frac{|\mathbf{k}|d|\mathbf{k}|\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi}{(2\pi)^3}\,e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\cos\theta+\mathrm{i}|\mathbf{k}|(t-t')} = \int \frac{|\mathbf{k}|d|\mathbf{k}|\,\sin\theta\,d\theta}{(2\pi)^2}\,e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\cos\theta+\mathrm{i}|\mathbf{k}|(t-t')} = \\
&-\int \frac{d|\mathbf{k}|}{4\pi^2}\,\frac{e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}(t-t')}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,d[|\mathbf{k}||(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|\cos\theta]\,e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\cos\theta} = \\
&\frac{1}{2\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\left[\int \frac{d|\mathbf{k}|}{2\pi}\,e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}|(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|+(t-t'))} - e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}|(t-t'-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}\right] = \\
&\frac{1}{2\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\left(\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|+t-t')-\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|-t+t')\right)
\end{aligned} \tag{10}$$
$\boxed{\texttt{k3int1}}$

et

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-\mathrm{i}|\mathbf{k}|(t-t')}}{|\mathbf{k}|} = \int \frac{|\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}|\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\cos\theta+\mathrm{i}|\mathbf{k}|(t-t')}}{|\mathbf{k}|} = \\
&\int \frac{|\mathbf{k}|d|\mathbf{k}|\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi}{(2\pi)^3}\,e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\cos\theta+\mathrm{i}|\mathbf{k}|(t-t')} = \int \frac{|\mathbf{k}|d|\mathbf{k}|\,\sin\theta\,d\theta}{(2\pi)^2}\,e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\cos\theta+\mathrm{i}|\mathbf{k}|(t-t')} = \\
&-\int \frac{d|\mathbf{k}|}{4\pi^2}\,\frac{e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}(t-t')}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,d[|\mathbf{k}||(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|\cos\theta]\,e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\cos\theta} = \\
&\frac{1}{2\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\left[\int \frac{d|\mathbf{k}|}{2\pi}\,e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}|(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|-(t-t'))} - e^{\mathrm{i}|\mathbf{k}|(-(t-t)'-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}\right] = \\
&\frac{1}{2\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\left(\delta(t-t'-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)-\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|+t-t')\right)
\end{aligned} \tag{11}$$
$\boxed{\texttt{k3int2}}$

Finalement :

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-\mathrm{i}k(x-x')}}{k^2} = \\
&\frac{\mathrm{i}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\left[\Theta(t-t')\left((\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|+t-t')-\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|-t+t'))\right)-\right. \\
&\qquad\left.\Theta(t'-t)\left((\delta(t-t'-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)-\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|+t-t'))\right)\right] = \\
&\frac{\mathrm{i}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\left[\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|+t-t')-\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|-(t-t'))\right]
\end{aligned} \tag{12}$$
$\boxed{\texttt{propagat}}$

puisque $\Theta(t-t')+\Theta(t'-t)=1$.

On obtient, ainsi, l'expression suivante pour $A_\mu(x)$

$$\begin{aligned}
A_\mu(t,\mathbf{x}) &= -\int d^4x'\,\frac{\mathrm{i}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\left[\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|+t-t')-\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|-(t-t'))\right]\,J_\mu(t',\mathbf{x}') = \\
&-\mathrm{i}\int d^3\mathbf{x}'\,\frac{J_\mu(t+|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|,\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}+\mathrm{i}\int d^3\mathbf{x}'\,\frac{J_\mu(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|,\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}
\end{aligned} \tag{13}$$
$\boxed{\texttt{Amusol}}$

Cette expression est remarquable, car elle met en évidence le fait que la solution de l'équation $\Box A_\mu(x)=J_\mu(x)$ est la *différence* de deux termes. Dans chacun de ces termes l'integrale porte sur la position de la source dans l'espace–mais l'instant n'est pas l'instant au point de mesure, mais décalé, dans le passé et dans le future du temps qu'il faut pour que l'information parcoure la distance entre source et détecteur. Le premier terme se réfère au futur, le deuxième au passé.

Ces expressions s'appellent, aussi, les potentiels de Liénard et de Wiechert.

Un point très important est que l'expression pour $A_\mu(x)$ est *réelle* : La présence du i est indispensable, car l'expression est la *différence* de deux termes complexes conjuguées, ainsi la présence du i assure que l'expression finale est bien réelle.

Exercice : Montrer que ces expressions satisfont la condition de jauge de Lorenz, $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu = 0$, pourvu que le charge est conservée, de manière locale.

2.2 Le calcul des champs et de l'énergie transportée à cause de chaque source à part

psPoynting

Le potentiel, $A_\mu(x)$ n'est pas le but final de nos calculs, ne serait-ce que parce qu'il n'est pas invariant sous transformations de jauge, ni sous transformations de Lorentz. Les champs électrique et magnétique, déduits de ce potentiel sont invariants sous transformations de jauge, mais changent sous transformations de Lorentz. Leur calcul est l'etape suivante, pour aboutir à des quantités qui seraient invariantes sous transformations de Lorentz, également.

Pour calculer les champs électrique et magnétique à partir du potentiel $A_\mu(x)$, on a besoin de ses dérivées : par rapport aux composantes de $\mathbf{x}$ pour le champ magnétique, par rapport à t et aux composantes de $\mathbf{x}$ pour le champ électrique.

Comme le calcul direct mène à des expressions assez compliquées, ça vaut la peine de prendre le temps pour réfléchir, comment simplifier le calcul.

Puisque l'on cherche à étudier les effets de sources, qui dépendent du temps et que, pour des sources dont la dépendance sur l'espace et le temps est fixe, les équations sont linéaires, on peut les résoudre par transformée de Fourier.

Ainsi, si l'on se limite au cas des signaux qui voyagent du passé vers le futur, on doit gérer l'expression suivante :

$$A_\mu(x) = \int d^3\mathbf{x}'\,\frac{J_\mu(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|,\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{14}$$ Amuret

Si l'on fait l'hypothèse que

$$J_\mu(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|,\mathbf{x}') = e^{\mathrm{i}\omega(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}J_\mu(\mathbf{x}') \tag{15}$$ timedepJ

alors on trouve que

$$A_\mu(x) \equiv A_\mu(t,\mathbf{x}) = e^{\mathrm{i}\omega t}\int d^3\mathbf{x}'\,e^{-\mathrm{i}\omega|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\frac{J_\mu(\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \equiv e^{\mathrm{i}\omega t}A_\mu(\mathbf{x}) \tag{16}$$ Amuretx

Dans les unités, que l'on emploie, $\omega = |\mathbf{k}|$, puisque $c = 1$. Et les champs magnétique et électrique, vont avoir cette même dépendance dans le temps.

Maintenant que l'on a pris en compte la dépendance sur le temps, on doit s'intéresser à la dépendance sur l'espace.

L'idée est de reconnaître que cette expression est une superposition d'ondes sphériques :

$$A_\mu(t,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}'\, \frac{e^{\mathrm{i}\omega(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} J_\mu(\mathbf{x}') \tag{17}$$

Amuretx1

que l'on peut considérer une par une, pour calculer leur contribution aux champs électrique et magnétique.

La source qui réside au point $\mathbf{x}'$, contribue

$$A_\mu(t,\mathbf{x}) = \frac{e^{\mathrm{i}\omega(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} J_\mu(\mathbf{x}') \tag{18}$$

Amuretxp

Si l'on peut considérer que cette source n'est pas affectée par les champs qu'elles produit, on peut prendre comme origine de coordonnés sa position, c.à.d. poser $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ et $|\mathbf{x}| \equiv r$. On a, ainsi,

$$A_\mu(t,r) = \frac{e^{\mathrm{i}\omega(t-r)}}{4\pi r} J_\mu(\mathbf{0}) \tag{19}$$

Amu1sour

On calcule, maintenant, les composantes du champ magnétique, $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$.

Le calcul est assez direct :

$$B_K = \varepsilon_{KLM}\partial_L A_M = \varepsilon_{KLM}\partial_L\left(\frac{e^{-\mathrm{i}\omega r}}{r}\right) e^{\mathrm{i}\omega t} J_M(\mathbf{0}) \tag{20}$$

magfield

Puisque

$$\partial_L f(r) = f'(r)\frac{x_L}{r} \tag{21}$$

derivr

on trouve immédiatement que

$$B_K = -e^{\mathrm{i}\omega(t-r)}\varepsilon_{KLM}\left(\frac{\mathrm{i}\omega}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{x_L}{r} J_M(\mathbf{0}) \tag{22}$$

magfield

Les composantes du champ électrique sont déduites à partir de l'équation de Maxwell–Ampère :

$$\mathrm{i}\omega\mathbf{E}(t,r) = \mathrm{rot}\,\mathbf{B}(t,r) - \mathbf{J}(t,r) \tag{23}$$

elfield

Mais $\mathbf{J}(t,r) = \mathbf{0}$, puisqu'il n'y a pas de source au point de mesure.

Ainsi,

$$E_K = -\frac{\mathrm{i}}{\omega}\varepsilon_{KPR}\partial_P B_R = -\frac{\mathrm{i}}{\omega}\varepsilon_{KPR}\partial_P\left(-e^{\mathrm{i}\omega(t-r)}\varepsilon_{RLM}\left(\frac{\mathrm{i}\omega}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{x_L}{r} J_M(\mathbf{0})\right) \tag{24}$$

elfield1

Avant de poursuivre le calcul ça vaut la peine de regarder les expressions pour les champs plus attentivement.

On constate que ces expressions sont la somme d'un terme, proportionnel à x_L/r^3 et d'un terme proportionnel à x_L/r^2.

A "courtes distances", c'est le premier terme qui est le plus important ; à "longues distances" c'est le second.

On note, à cette occasion, que $x_L/r^2 = (x_L/r)/r$ et que $x_L/r^3 = (x_L/r)/r^2$. Il faut retenir que $x_L/r \equiv n_L$ est le vecteur unitaire dans la direction radiale.

On s'intéresse aux termes proportionnels à n_L/r. La raison est que le flux d'énergie, transporté par les champs électrique et magnétique, est proportionnel à $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$; par conséquent, sa contribution, par le théorème de la divergence, est proportionnel à $r^2(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$, ce qui implique que, dans la limite $r\to\infty$, seuls les termes des champs proportionnels à n_L/r vont contribuer.

Ainsi, si l'on s'intéresse au transport de l'énergie "infiniment loin" de la source, on doit se concentrer aux termes des champs, qui décroissent comme x_L/r^2, ou comme x_Lx_M/r^3,c.à.d.

$$\begin{array}{l} B_K \approx -e^{\mathrm{i}\omega(t-r)}\varepsilon_{KLM}\dfrac{\mathrm{i}\omega x_L}{r^2}J_M(\mathbf{0}) \Leftrightarrow \mathbf{B} \approx -\mathrm{i}\omega\dfrac{e^{\mathrm{i}\omega(t-r)}}{r^2}\mathbf{x}\times\mathbf{J}(\mathbf{0}) \\ E_K = -\dfrac{\mathrm{i}}{\omega}\varepsilon_{KPR}\partial_P B_R \approx -\mathrm{i}\omega\dfrac{e^{\mathrm{i}\omega(t-r)}}{r^3}\left[x_K(x_M J_M(\mathbf{0})) - x^2 J_K(\mathbf{0})\right] \Leftrightarrow \\ \mathbf{E} \approx -\dfrac{\mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega(t-r)}}{r^3}\left(\mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{0})) - x^2\mathbf{J}(\mathbf{0})\right) \end{array} \tag{25}$$ radiatio

Ces champs sont ceux produits par la source $\mathbf{J}(\mathbf{0})$, qui décrit une charge ponctuelle, qui bouge de façon harmonique, avec pulsation ω. Mais, si la charge bouge, on ne peut pas, bien entendu, la considérer comme fixe (comme l'on a fait, lorsque l'on a pris $\mathbf{x}'=\mathbf{0}$) ; ceci est une approximation, qui peut être considérée comme raisonnable, si le déplacement de la charge peut être négligée devant la distance au point de mesure. Un raffinement consiste à intégrer sur les positions possibles de la source. On va essayer de procéder par étapes, afin de mieux comprendre les phénomènes physiques.

2.3 L'énergie rayonnée par une source individuelle qui bouge peu

radiation

Les champs électrique et magnétique donnés par les expressions (25) [radiationfield] transportent de l'énergie de la source, située à l'origine, infiniment loin d'elle. La densité d'énergie par unité de surface et de temps transportée est donnée par l'expression

$$\mathbf{P} = \mathrm{Re}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*\right) \tag{26}$$ Poynting

qui satisfait la loi de conservation locale

$$\mathrm{div}\,\mathbf{P} = -\frac{\partial\rho_E}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{1}{2}\left(|\mathbf{E}|^2 + \mathbf{B}|^2\right)\right] \tag{27}$$ loiconse

Maintenant l'on remarque que l'expression entre crochets dans le membre de droite est, en fait, indépendant du temps ; par conséquent, sa dérivée par rapport au temps est égale à zéro. C'est seulement lorsque l'on considère des superpositions de modes–qui ont chacun une fréquence différente–que la dépendance en temps apparaît.

Ainsi la quantité intéressante à calculer est le flux d'énergie par unité de temps, comme fonction de la direction. Ceci veut dire la chose suivante : Calculer

$$\lim_{r\to\infty} r^2 P_I \frac{x_I}{r} \equiv f(\theta,\phi) \tag{28}$$ Pthetaph

où $x_I \equiv r(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ décrit les coordonnées du point de mesure, dans le système des coordonnées dont l'origine spatial est la source.

Exercice : Montrer que l'expression, dont on prend la limite, en fait, est indépendante de r, en comptant les puissances de r au numérateur et au dénominateur. Mettre en évidence la dépendance sur les angles θ et ϕ.

Ce qui n'est pas évident dans nos calculs est l'invariance de Lorentz. En fait, la loi de conservation de l'énergie est cohérente avec le fait que $(\rho_E, \mathbf{P}) \equiv P_\mu$ est un quadrivecteur, au même titre que J_μ ; la démonstration est une conséquence des transformations des champs et des coordonnées sous transformations de Lorentz.

D'autre part, on peut montrer que l'énergie totale (comme la charge totale) est invariante sous transformations de Lorentz

$$Q \equiv \int d^3\mathbf{x}\,\rho(t,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}'\,\rho'(t',\mathbf{x}') \tag{29}$$ totalech

Exercice : Montrer cette proposition.

La question qui reste est, si $f(\theta,\phi)$ est, ou non, invariante sous transformations de Lorentz. On va chercher à l'aborder prochainement.

3 Sommer sur toutes les sources, lorsqu'elles sont localisées dans une région finie de l'espace : Le développement multipolaire

multipoles

Maintenant on veut apprendre à sommer sur la contribution de plusieurs sources, qui se tiennent dans une endroit borné.

C.à.d. on voudrait calculer

$$A_\mu(x) \equiv A_\mu(t,\mathbf{x}) = e^{\mathrm{i}\omega t} \int d^3\mathbf{x}'\, e^{-\mathrm{i}\omega|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \frac{J_\mu(\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \equiv e^{\mathrm{i}\omega t} A_\mu(\mathbf{x}) \tag{30}$$ Amuretxt

lorsque $J_\mu(\mathbf{x})$ sont des fonctions connues et fixes de $\mathbf{x}$. Et, à partir de cette expression calculer champs électrique et magnétique et flux d'énergie. On s'intéresse à des distances "grandes" devant la taille de la source, c.à.d. $|\mathbf{x}| >> \max|\mathbf{x}'|$.

Par conséquent, on pourra poser $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\equiv r$ et négliger sa dépendance en $\mathbf{x}'$. Alors, on aura à calculer, sous cette hypothèse

$$A_\mu(x)\equiv A_\mu(t,\mathbf{x})\approx\frac{e^{\mathrm{i}\omega(t-r)}}{4\pi r}\int d^3\mathbf{x}'\,J_\mu(\mathbf{x}') \tag{31}$$

Amuretxt

On constate que

$$A_0(t,\mathbf{x})=\frac{e^{\mathrm{i}\omega(t-r)}}{4\pi r}\int d^3\mathbf{x}'\,\rho(\mathbf{x}')=q\frac{e^{\mathrm{i}\omega(t-r)}}{4\pi r} \tag{32}$$

A0far

où q est la charge électrique de la source.

Par contre, $\mathbf{A}(t,\mathbf{x})$ est plus intéressant :

$$\mathbf{A}(t,\mathbf{x})=\frac{e^{\mathrm{i}\omega(t-r)}}{4\pi r}\int d^3\mathbf{x}'\,\mathbf{J}(\mathbf{x}')=-\frac{e^{\mathrm{i}\omega(t-r)}}{4\pi r}\int d^3\mathbf{x}'\,[\mathrm{div}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{x}')]\mathbf{x}' \tag{33}$$

Avecfar

sous l'hypothèse que la source est confinée dans une région de l'espace, de façon à ce que le terme de bord puisse être pris égal à 0.

Maintenant la conservation locale de la charge électrique est exprimée par l'équation

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu J_\nu=\mathrm{div}\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\Leftrightarrow\mathrm{i}\omega\rho+\mathrm{div}\cdot\mathbf{J}=0 \tag{34}$$

divJeq0

puisque la dépendance sur le temps est supposée harmonique et l'on étudie un seul mode. Par conséquent,

$$\mathbf{A}(t,\mathbf{x})=\mathrm{i}\omega\frac{e^{\mathrm{i}\omega(t-r)}}{4\pi r}\int d^3\mathbf{x}'\,\rho(\mathbf{x}')\mathbf{x}'=\mathrm{i}\omega\frac{e^{\mathrm{i}\omega(t-r)}}{4\pi r}\mathbf{p} \tag{35}$$

Avecfard

Le résultat de l'intégration est un vecteur constant, qui représente le fait que le centre de masse de la densité de charge n'est pas à l'origine. Ce vecteur, $\mathbf{p}$, s'appelle le moment dipolaire.

En fait, si l'on compare l'éq. (35) et l'éq. (19), on se rend compte qu'elles sont identiques, si l'on identifie $J_\mu(\mathbf{0})$ et $(q,\mathrm{i}\omega\mathbf{p})$. Par conséquent, il suffit d'effectuer les remplacements correspondants dans les expressions pour les champs électrique et magnétique et l'énergie rayonnée.

C'est pour cette raison que cette approximation s'appelle l'approximation dipolaire.

On peut calculer les corrections à cette approximation, en développant $\omega|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ en puissances de $|\mathbf{x}'|/|\mathbf{x}|$ et de $\omega|\mathbf{x}'|^2/|\mathbf{x}|$. Car $\omega\mathrm{max}|\mathbf{x}'|<<1$ implique que la source est cohérente.

Bien entendu, il ne faut pas oublier que les calculs ont porté sur la contribution d'un seul mode, de fréquence ω et de vecteur d'onde $\mathbf{k}$, tel que $|\mathbf{k}=\omega$.

Dans la section suivante on va déterminer les champs produit par une charge ponctuelle, qui bouge de manière quelconque.

4 La solution pour une source ponctuelle dynamique

soldyn

Le cas d'une source "dynamique" ponctuelle est celui, où $J_\mu(t,\mathbf{x})=u_\mu(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}(t))$, où $u_\mu(t)=(1,\mathbf{v}(t))=(1,\dot{\mathbf{y}}(t))$. On se rappelle que $u_\mu(t)$ est la vitesse en unités où la vitesse de la lumière $c = 1$. Ici $\mathbf{y}(t)$ décrit la trajectoire de la charge ponctuelle, de charge électrique unité ; $y_\mu(t) = (t, \mathbf{y}(t))$ décrit la ligne d'univers.

Dans ce cas, dans éq. (Amusol 13)

$$A_\mu(t,\mathbf{x}) = -\int d^4x' \, \frac{\mathrm{i}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \left[\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| + t - t') - \delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - (t-t'))\right] u_\mu(t')\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{y}(t')) \tag{36}$$

Amusolne

l'idée est d'employer la contrainte imposée par l'expression du courant pour éliminer l'intégrale sur l'espace et rester avec une intégrale sur le temps :

$$\begin{aligned} A_\mu(t,\mathbf{x}) = -\int d^4x' \, \frac{\mathrm{i}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \left[\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| + t - t') - \delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - (t-t'))\right] u_\mu(t')\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{y}(t')) = \\ \int dt' \, \frac{\mathrm{i}u_\mu(t')}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}(t')|} \left[\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{y}(t')| + t - t') - \delta(|\mathbf{x}-\mathbf{y}(t')| - (t-t'))\right] \end{aligned} \tag{37}$$

Amusolne

Les fonctions $\mathbf{y}(t)$ décrivent la trajectoire de la charge ponctuelle et $y_\mu(t) \equiv (t, \mathbf{y}(t))$ sa ligne d'univers dans l'espace temps ; $(t, \mathbf{x})$ est le point de mesure, dans l'espace temps.

On cherche, alors, à calculer les champs, électrique et magnétique, correspondants, que le mouvement de la charge, selon $y_\mu(t)$, produit au point $x_\mu = (t, \mathbf{x})$. On veut se concentrer sur la contribution, qui décroit comme $1/|\mathbf{x}| = 1/r$, car c'est elle qui pourra contribuer au transport d'énergie arbitrairement loin de la source.

En fait, le calcul est simple : Les fonctions δ impliquent que l'on doive résoudre les équations

$$t - t' \pm |\mathbf{x} - \mathbf{y}(t')| = 0 \equiv t \pm h(t') \tag{38}$$

othertim

et exprimer à travers elles t' comme fonction de t (ainsi que de $\mathbf{x}$ et des fonctions $\mathbf{y}(.)$), pour pouvoir, par la suite, calculer les champs électrique et magnétique.

C.à.d. on a à traiter des expressions de la forme

$$A(t,\mathbf{x}) = \int dt' \, \delta(t \pm h(t')) f(t') \tag{39}$$

Amusampl

L'idée est de faire le changement de variables, qui consiste à poser $\tau \equiv h(t') \Leftrightarrow d\tau = h'(t')dt' = h'(h^{-1}(\tau))dt' \Leftrightarrow dt' = d\tau/|h'(h^{-1}(\tau))|$; ainsi

$$A(t,\mathbf{x}) = \int d\tau \, \delta(t-\tau) \frac{f(h^{-1}(\tau))}{|h'(h^{-1}(\tau))|} = \frac{f(h^{-1}(t))}{|h'(h^{-1}(t))|} \tag{40}$$

deltacha

pour le terme "avancé".

Dans ce qui suit, alors, $h(t') = t' - |\mathbf{x} - \mathbf{y}(t')| = t$ et et, par conséquent, $t' = h^{-1}(t, \mathbf{x})$.

$$h'(t') = 1 - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}(t'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(t')|} \cdot \dot{\mathbf{y}}(t') \equiv 1 - \mathbf{n}(t') \cdot \dot{\mathbf{y}}(t') \tag{41}$$

hprime

car on va se concentrer sur le cas “avancé”, où les signaux vont du futur vers le passé-mais ceci est, juste un choix de signe.

Exercice : Indiquer dans les calculs qui suivent, les modifications pour traiter le cas “retardé”.

On aura besoin des dérivées $\partial h^{-1}(t,\mathbf{x})/\partial t = \partial t'/\partial t$ et $\partial h^{-1}(t,\mathbf{x})/\partial x_J = \partial t'/\partial x_J$. Le calcul est le suivant :

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = h'(t') = 1 - \mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t') \Leftrightarrow \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t')} \tag{42}$$

dtprime/

et

$$\frac{\partial t'}{\partial x_J} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_J} = \frac{1}{h'(t')}\frac{\partial h}{\partial x_J} = -\frac{1}{1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t')}\frac{x_J - y_J(t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}(t')|} = -\frac{n_J(t')}{1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t')} \tag{43}$$

dtprimed

Il est utile de définir $R(t') \equiv |\mathbf{x}-\mathbf{y}(t')|$, ainsi que le vecteur unitaire, $\mathbf{n}(t') \equiv (\mathbf{x}-\mathbf{y}(t'))/R(t')$; $(\mathbf{x}-\mathbf{y}(t'))/|\mathbf{x}-\mathbf{y}(t')| \equiv \mathbf{n}(t')$ est le vecteur unité, dont la direction est celle entre la position de la charge ponctuelle et le point de mesure.

On se rend compte que l’équation $t = h(t')$ possède deux solutions–l’une correspond au passé, l’autre au futur, par rapport au point de mesure $(t,\mathbf{x})$.

On note ici que $h'(t')$ ne peut s’annuler, car $|\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t')| \leq |\mathbf{n}(t')||\dot{\mathbf{y}}(t')| < 1$, puisque $|\mathbf{n}(t')| = 1$ (car $\mathbf{n}(t')$ est un vecteur unité) et $|\dot{\mathbf{y}}(t')| < 1$, puisque l’on travaille dans un système d’unités où la vitesse de la lumière est égale à 1.

A partir d’ici c’est, juste, une question de calcul, il n’y a pas de difficultés conceptuelles. La dépendance en $\mathbf{x}$ est “cachée” dans la fonction $h(.)$. Mais comme le calcul est, assez, compliqué, on va discuter les principales étapes.

Exercice : Résoudre $t = h(t')$ pour $\mathbf{y}(t') = \mathbf{v}_0 t'$ (mouvement uniforme), pour $\mathbf{y}(t') = \mathbf{a}t'^2/2$ (mouvement uniformément accéléré) ainsi que pour le cas $\mathbf{y}(t') = R\mathbf{e}_z\cos\Omega t'$ (mouvement oscillatoire, d’amplitude R, dans la direction z).

Discuter similarités et différences.

Donc, le but est de rendre explicite l’expression pour les champs électrique et magnétique, déduits du potentiel, qui est défini par le membre de droite de l’éq. (deltachange 40).

$$A_\mu(t,\mathbf{x}) = \frac{f_\mu(h^{-1}(t))}{|h'(h^{-1}(t))|} = \frac{\dot{y}_\mu(t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}(t')|(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))} = \frac{\dot{y}_\mu(t')}{R(t')|1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t')|} \tag{44}$$

deltacha

où $t = t' - |\mathbf{x}-\mathbf{y}(t')|$, implique pour les champs électrique et magnétique, ainsi que pour l’énergie rayonnée ; car la dépendance sur $\mathbf{x}$ n’est pas évidente et, par conséquent, extraire les expressions qui vont contribuer au rayonnement, c.à.d. ont une dépendance en $1/|\mathbf{x}|$, pour $|\mathbf{x}| >> |\mathbf{y}(t')|$, n'est pas aussi facile que dans les cas précédents. Cependant, il faut garder en tête que les termes, que l'on cherche, sont ceux qui décroissent comme $1/R(t')$ et/ou $(\mathbf{x}-\mathbf{y}(t'))/|\mathbf{x}-\mathbf{y}(t')|^2 = \mathbf{n}(t')/R(t')$.

Ça c'est le point important de comprendre des calculs qui suivent : Il faut apprendre à reconnaître, le plus tôt possible, les termes, qui décroissent comme $1/R(t')$ et ne s'occuper que de ceux-là. Bien entendu, au début on ne sait pas et il faut faire, parfois, plus de calculs que nécessaire.

1. *Le champ magnétique* : $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$; en composantes :

$$
\begin{gathered}
B_I = \varepsilon_{IJK}\partial_J A_K = \varepsilon_{IJK}\frac{\partial}{\partial x_J}\frac{\dot{y}_K(t')}{R(t')|1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t')|} = \\
\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_J}\dot{y}_K(t')\right)}{R(t')|1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t')|} - \frac{\dot{y}_K}{R(t')^2(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))^2}\frac{\partial}{\partial x_J}\left[R(t')(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))\right]
\end{gathered}
\tag{45}
$$

magfield

Evaluons cette expression terme par terme :

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x_J}\dot{y}_K(t') = \ddot{y}_K(t')\frac{\partial t'}{\partial x_J} = \ddot{y}_K(t')\frac{dt'}{dh}\frac{\partial h}{\partial x_J} = -\frac{\ddot{y}_K}{1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t')}\frac{x_J-y_J(t')}{R(t')} = \\
-\frac{\ddot{y}_K(t')}{1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t')}n_J(t') \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_J}\dot{y}_K(t')\right)}{R(t')|1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t')|} = -\frac{\ddot{y}_K(t')n_J(t()}{R(t')(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))^2}
\end{gathered}
\tag{46}
$$

dydotdx

On note que ce terme va contribuer au rayonnement, car il décroît comme $1/R(t')$. Occupons-nous maintenant de l'autre terme. Il ne faut pas oublier qu'il s'agit du numérateur d'une expression, dont le dénominateur est proportionnel à $R(t')^2$. Par conséquent, seulement les contributions du numérateur, qui sont proportionnelles à $R(t')$, sont pertinentes.

$$
\frac{\partial}{\partial x_J}\left[R(t')(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))\right] = \frac{\partial R(t')}{\partial x_J}(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t')) - R(t')\frac{\partial}{\partial x_J}\left(\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t')\right)
\tag{47}
$$

dxdenom

Le premier terme fait la contribution suivante :

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial R(t')}{\partial x_J} = \frac{\partial}{\partial x_J}|\mathbf{x}-\mathbf{y}(t')| = \frac{1}{R(t')}\frac{\partial}{\partial x_J}\left\{x_I - y_I(t')\right\}(x_I-y_I(t')) = \\
\frac{1}{R(t')}\left\{\delta_{IJ} - \frac{\partial y_I(t')}{\partial x_J}\right\}(x_I-y_I(t')) = \frac{1}{R(t')}\left\{\delta_{IJ} - \frac{\partial y_I(t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_J}\right\}(x_I-y_I(t'))
\end{gathered}
\tag{48}
$$

dRdxJ

On se rend compte que l'on n'a pas besoin de poursuivre le calcul : Ce terme ne pourra contribuer au rayonnement, car sa contribution au champ magnétique lui-même sera

$$
\begin{gathered}
-\frac{\dot{y}_K}{R(t')^2(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))^2}\frac{1}{R(t')}\left\{\delta_{IJ} - \frac{\partial y_I(t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_J}\right\}(x_I-y_I(t')) = \\
-\frac{\dot{y}_K}{R(t')^2(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))^2}\left\{\delta_{IJ} - \frac{\partial y_I(t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_J}\right\}n_(t')
\end{gathered}
\tag{49}
$$

BfielddR

donc décroît comme $1/R(t')^2$ à grande distance.

Par contre, le deuxième terme contient un facteur explicite de $R(t')$. Calculons sa contribution :

$$\frac{\partial}{\partial x_J}\left(\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t')\right)=\frac{\partial\mathbf{n}(t')}{\partial x_J}\cdot\dot{\mathbf{y}}(t')+\mathbf{n}(t')\cdot\frac{\partial\dot{\mathbf{y}}(t')}{\partial x_J}\tag{50}$$

dnydx

On trouve que

$$\frac{\partial\mathbf{n}(t')}{\partial x_J}\cdot\dot{\mathbf{y}}(t')=\frac{\partial}{\partial x_J}\left(\frac{x_I-y_I(t')}{R(t')}\right)\dot{y}_I(t')=\frac{1}{R(t')}\left(\delta_{IJ}-\frac{\partial y_I(t')}{\partial x_J}\right)\dot{y}_I(t')\tag{51}$$

dndxnew

Ce terme contribue, ainsi

$$\begin{array}{l}-\dfrac{\dot{y}_K}{R(t')^2(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))^2}\left(-R(t')\dfrac{1}{R(t')}\left(\delta_{IJ}-\dfrac{\partial y_I(t')}{\partial x_J}\right)\dot{y}_I(t')\right)=\\ \dfrac{\dot{y}_K}{R(t')^2(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))^2}\left(\delta_{IJ}-\dfrac{\partial y_I(t')}{\partial x_J}\right)\dot{y}_I(t')\end{array}\tag{52}$$

dndxnewm

qui, également, décroît comme $1/R(t')^2$, donc ne contribue pas au rayonnement.

Donc on n'a qu'à calculer une contribution, que l'on a, déjà, calculée, cependant (on somme implicitement sur les indices répétés) :

$$\begin{array}{l}-R(t')\mathbf{n}(t')\cdot\dfrac{\partial\dot{\mathbf{y}}(t')}{\partial x_J}=-R(t')n_I(t')\dfrac{\partial\dot{y}_I(t')}{\partial x_J}=(-R(t'))n_I(t')\left(-\dfrac{\ddot{y}_I(t')n_J(t()}{R(t')(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))^2}\right)=\\ \dfrac{\mathbf{n}(t')\cdot\ddot{\mathbf{y}}(t')n_J(t')}{(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))^2}\end{array}\tag{53}$$

dydotdx

Et l'on déduit que ce terme va, finalement, faire une contribution, au champ magnétique, qui décroît comme $1/R(t')^2$, aussi.

Par conséquent, le seul terme qui contribue au rayonnement est celui de l'éq. (dydotdx 53) :

$$B_I\approx\varepsilon_{IJK}\left(-\frac{\ddot{y}_K(t')n_J(t')}{R(t')(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))^2}\right)\tag{54}$$

magfield

2. *Le champ électrique* : Il y a deux manières–bien entendu équivalentes–de calculer le champ électrique : (a) En employant les potentiels :

$$E_I=-\frac{\partial A_0}{\partial x_I}-\frac{\partial A_I}{\partial t}\tag{55}$$

Elefield

ou (b) à partir de l'équation de Maxwell–Ampère, $\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(t,\mathbf{x})=\mathbf{J}(t,\mathbf{x})+\dot{\mathbf{E}}(t,\mathbf{x})$. Sous l'hypothèse que $\mathbf{J}(t,\mathbf{x})=\mathbf{0}$ (il n'y a pas de charge au point de mesure), on a, encore une fois que $\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(t,\mathbf{x})=\dot{\mathbf{E}}(t,\mathbf{x})$ et l'on peut trouver les composantes du champ électrique par transformée de Fourier.

Pour éviter de faire deux transformées de Fourier et pour se rassurer que les deux méthodes sont équivalentes, on va discuter, alors, la première approche, puisque l'on a employé la première lors des cas précédents.

On calcule, encore une fois, chaque terme ; maintenant on peut, bien sûr, "recycler" les expressions, déjà, calculées !

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial A_0}{\partial x_I} = -\frac{\partial}{\partial x_I}\left(\frac{1}{R(t')(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))}\right) = \\
\frac{1}{R(t')^2(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))^2}\frac{\partial}{\partial x_I}\left(R(t')(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))\right) = O(\frac{1}{R(t')^2})
\end{gathered}
\tag{56}
$$

dA0dx

par les calculs précédents.

L'autre terme–qui, bien entendu, doit donner un terme qui contribue au rayonnement !– donne

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{y}_I(t')}{R(t')(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))}\right) = -\frac{\ddot{y}_I(t')}{R(t')(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))}\frac{\partial t'}{\partial t}+ \\
\frac{\dot{y}_I(t')}{R(t')^2(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))^2}\frac{\partial}{\partial t'}\left[R(t')(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))\right]\frac{\partial t'}{\partial t}
\end{gathered}
\tag{57}
$$

dAIdt

Par les calculs précédents on sait que le deuxième terme ne contribue pas ; par conséquent, l'expression pour le champ électrique, pertinent pour le rayonnement est

$$
E_I \approx -\frac{\ddot{y}_I(t')}{R(t')(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\ddot{y}_I(t')}{R(t')(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))^2}
\tag{58}
$$

elfieldd

On se rend compte que les expressions pour les champs, qui contribuent au rayonnement, sont, alors, très simples !

4.1 L'énergie rayonnée par la charge ponctuelle

larmor

Maintenant que l'on a les expressions pour le champ électrique et le champ magnétique, on peut calculer le flux d'énergie et étudier sa loi d conservation locale.

Il y a deux sujets à traiter, en particulier : (a) La dépendance du flux d'énergie sur la direction $\mathbf{n}(t')$ et (b) sur les propriétés de la trajectoire, $\mathbf{y}(t')$.

Rappelons lex expressions :

$$
\begin{gathered}
B_I \approx \varepsilon_{IJK}\left(-\frac{\ddot{y}_K(t')n_J(t')}{R(t')(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))^2}\right) \\
E_I \approx -\frac{\ddot{y}_I(t')}{R(t')(1-\mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{y}}(t'))^2}
\end{gathered}
\tag{59}
$$

radiatio

On remarque que ces champs sont reliés :

$$
B_I = \varepsilon_{IJK}n_J E_K \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{n}\times\mathbf{E}
\tag{60}
$$

ElMagfie

On constate, également, que ces champs sont proportionnels à l'accélération de la charge ; si la charge bouge à vitesse constante, $\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$, alors ces champs s'annulent et il n'y a pas de rayonnement !

Il faut faire bien attention que dans ces expressions la dépendance en temps est "cacheé" dans le paramètre t', qui est relié aux coordonnées du point de mesure, $(t, \mathbf{x})$, par la relation $t = t' - |\mathbf{x} - \mathbf{y}(t')| \equiv t' - R(t')$.

A partir de ces expressions on peut déduire celles du vecteur de Poynting et de la densité d'énergie rayonnée à cause du mouvement non-uniforme de la charge, si l'on impose la trajectoire $\mathbf{y}(t')$ à celle-ci.

Exercice : Calculer l'expression du vecteur de Poynting

$$P_I = \varepsilon_{IJK} E_I B_K \Leftrightarrow \mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{61}$$

Poynting

et de la densité d'énergie,

$$\rho_E = K \left(|\mathbf{E}|^2 + \mathbf{B}|^2 \right) \tag{62}$$

rhoE

Faire attention qu'ici on ne fait pas d'hypothèse si les champs sont complexes ou non !

Trouver la valeur de la constante K pour que la conservation locale

$$\mathrm{div}\, \mathbf{P} = \nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\partial \rho_E}{\partial t} \tag{63}$$

locallaw

soit une conséquence des équations de Maxwell.

On se rend compte que l'on peut désormais prendre le point de mesure $(t, \mathbf{x})$ comme origine du système des coordonnées !