

Les transformations de Möbius

Stam Nicolis

Institut Denis Poisson
Université de Tours, Université d'Orléans, CNRS

Tours, le 21 novembre 2018

Plan

Les
transformations de
Möbius

Stam Nicolis

Les
transformations de
Möbius

Dynamique des
transformations de
Möbius

Conclusions

Les transformations de Möbius

Dynamique des transformations de Möbius

Conclusions

Les transformations de Möbius

Les
transformations de
Möbius

Stam Nicolis

Les
transformations de
Möbius

Dynamique des
transformations de
Möbius

Conclusions

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

Les transformations de Möbius

Les
transformations de
Möbius

Stam Nicolis

Les
transformations de
Möbius

Dynamique des
transformations de
Möbius

Conclusions

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

On peut se restreindre au cas où $ad - bc = 1$ et une solution de cette relation est donnée lorsque $a = \cos \theta_n$, $b = -\sin \theta_n$, $c = \sin \theta_n$ et $d = \cos \theta_n$. Si l'on prend $\theta_n = \theta$ pour tout n ,

$$z' = \frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta}$$

Théorème (Résolution)

La suite $\{z_n\}$, pour le cas des éléments trigonométriques constants, est donnée par l'expression

$$z_n = \frac{z_0 \cos n\theta + \sin n\theta}{-z_0 \sin n\theta + \cos n\theta}$$

Théorème (Résolution)

La suite $\{z_n\}$, pour le cas des éléments trigonométriques constants, est donnée par l'expression

$$z_n = \frac{z_0 \cos n\theta + \sin n\theta}{-z_0 \sin n\theta + \cos n\theta}$$

Corollaire

La suite $\{z_n\}$, est périodique, si $\theta = 2\pi l/k$, avec période $T = k$.

Démonstration

Démonstration.

La démonstration suit par récurrence :

- On montre que c'est vrai, pour $n = 0$.

Démonstration

Démonstration.

La démonstration suit par récurrence :

- ▶ On montre que c'est vrai, pour $n = 0$.
- ▶ On montre que, si c'est vrai, pour $n = k$, alors c'est vrai pour $n = k + 1$.



On peut générer une suite $\{z_n\}$ en appliquant la transformation de Möbius de façon itérée :

$$z_{n+1} = \frac{az_n + b}{cz_n + d}$$

à partir d'un point de départ, z_0 . Un exemple est celui où $a = d = \cos \theta_n$ et $b = -c = -\sin \theta_n$ avec $\theta_n = n\theta = 2\pi n/k$.

Les polygones de Möbius et les zones “cachées”

Les
transformations de
Möbius

Stam Nicolis

Si l'on trace les suites $\{z_n\}$, sur le plan complexe, on trouve, d'une part, que les polygones peuvent être, soit convexes, soit étoilés—cf. fig. 1

Les
transformations de
Möbius

Dynamique des
transformations de
Möbius

Conclusions

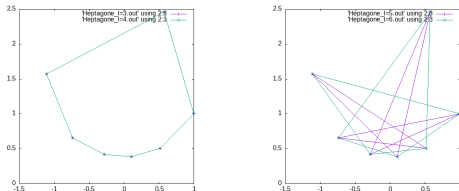


Figure – Polygones convexes et étoilés. Pour les étoilés on remarque la zone “blanche”.

Les polygones étoilés et leur zones “blanches”

Les
transformations de
Möbius

Stam Nicolis

Les rayons, qui relient les sommets successifs, peuvent
laisser des zones “blanches”—cf. fig.2

Les
transformations de
Möbius

Dynamique des
transformations de
Möbius

Conclusions

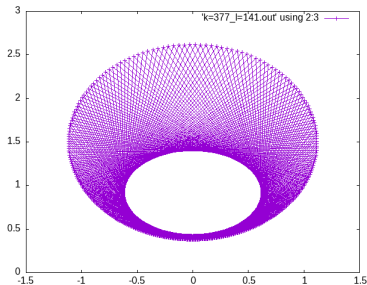


Figure – La “zone blanche.”

Les bords de la “zone blanche”

Les
transformations de
Möbius

Stam Nicolis

Si l'on regarde “à la loupe” les bords de la “zone blanche”
on remarque qu'ils ne sont pas lisses (cf. 9)

Les
transformations de
Möbius

Dynamique des
transformations de
Möbius

Conclusions

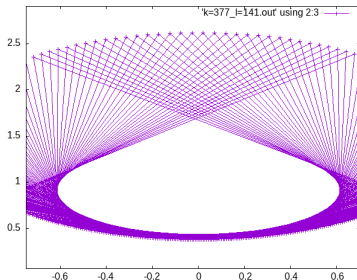


Figure – La zone blanche en plus grand.

Une manière de comprendre l'origine de ce coin est à
compléter

Conclusions

- Les transformations de Möbius réalisent une correspondance entre un nombre complexe z_n et un autre nombre complexe z_{n+1} .
Si les coefficients de la transformation peuvent être exprimés en termes de fonctions trigonométriques, la correspondance “hérite” les propriétés de périodicité de celles-ci : Si $\theta = 2\pi/k$, alors, $k\theta = 2\pi$ et $z_k = z_0$, par conséquent, la période est $T = k$.

Conclusions

- ▶ Les transformations de Möbius réalisent une correspondance entre un nombre complexe z_n et un autre nombre complexe z_{n+1} .
Si les coefficients de la transformation peuvent être exprimés en termes de fonctions trigonométriques, la correspondance “hérite” les propriétés de périodicité de celles-ci : Si $\theta = 2\pi/k$, alors, $k\theta = 2\pi$ et $z_k = z_0$, par conséquent, la période est $T = k$.
- ▶ A dénominateur, k , fixe, on peut avoir des polygones convexes ou étoilés, selon la valeur de l .
En plus, on peut avoir plusieurs “étoiles” distinctes, selon la valeur de k .
- ▶ Les polygones produits par la suite de Möbius ne sont pas réguliers et la répartition de leurs sommets n'est pas régulière, non plus, entre “hémicercle nord” et “hémicercle sud”.