

Les transformations de Möbius

Stamatios Nicolis¹

*Département de Physique
Université de Tours
Parc Grandmont, 37200 Tours, France*

Résumé

Quelques exemples des transformations de Möbius.

1. E-Mail : stamatios.nicolis@univ-tours.fr

Table des matières

1	Introduction	2
2	Quelques propriétés de la suite $\{z_n\}$ pour le cas des coefficients trigonométriques	3
2.1	Quelques résultats empiriques	4
3	La projection stéréographique	5
3.1	Sens physique de la suite de Möbius	8
4	La mécanique des réflexions	9
5	Conclusions	12
A	Les codes Python	12
B	Quelques points techniques	15

1 Introduction

Les transformations de Möbius sont définies par

$$z_{n+1} = \frac{az_n + b}{cz_n + d} \quad (1)$$

Un cas particulier est celui où $ad - bc = 1$. Cette relation peut être représentée par $a = \cos \theta = d, b = -c = -\sin \theta$.

Dans ce cas on peut “résoudre” la récurrence, dans le sens que l’on peut exprimer z_n en termes uniquement de z_0 et de n , sans devoir calculer tous les termes $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ de la suite qui précèdent z_n . Ceci est le résultat de la proposition suivante.

Proposition 1. *La solution de la récurrence (1), lorsque $a = \cos \theta = d, b = -c = -\sin \theta$, est donnée par l’expression*

$$z_n = \frac{z_0 \cos(n\theta) - \sin(n\theta)}{z_0 \sin(n\theta) + \cos(n\theta)} \quad (2)$$

Démonstration. 1. On montre que l’expression (2) est valable pour $n = 0$:

$$z_0 = \frac{z_0 \cos(0) - \sin(0)}{z_0 \sin(0) + \cos(0)} = z_0 \quad (3)$$

2. On fait l’hypothèse que l’expression (2) est valable pour $n = p > 0$ et l’on veut montrer qu’elle implique que

$$z_{p+1} = \frac{z_0 \cos[(p+1)\theta] - \sin[(p+1)\theta]}{z_0 \sin[(p+1)\theta] + \cos[(p+1)\theta]} \stackrel{?}{=} \frac{z_p \cos \theta - \sin \theta}{z_p \sin \theta + \cos \theta} \quad (4)$$

Pour établir cette dernière égalité, il suffit de remplacer dans le membre de droite de l’éq. (4) l’expression pour z_p , donné par l’éq. (2), pour laquelle on fait l’hypothèse qu’elle est valable pour $n = p$. Le résultat est la conséquence d’algèbre triviale, qui est basée sur les identités

$$\begin{aligned} \cos[(p \pm 1)\theta] &= \cos(p\theta) \cos \theta \mp \sin(p\theta) \sin \theta \\ \sin[(p \pm 1)\theta] &= \sin(p\theta) \cos \theta \pm \cos(p\theta) \sin \theta \end{aligned} \quad (5)$$

□

Le résultat de cette proposition est que z_n est une fonction de l’angle θ , qui est supposé connu. Un cas particulier est, lorsque θ n’est pas un nombre réel quelconque, mais est une fraction de 2π , la période des fonctions trigonométriques, c.à.d.

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{l}{k} \quad (6)$$

avec $l, k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas la suite $\{z_n\}$ est périodique, avec période k , conséquence du théorème suivant.

Théorème 1. Si θ est un multiple rationnel de 2π , $\theta = 2\pi l/k$, avec $l, k \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{z_n\}$ est périodique avec période k .

Démonstration. On peut exprimer l'entier n , de façon unique, comme

$$n = mk + r \quad (7)$$

avec $m, r \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < k$.

Par conséquent, l'argument des fonctions trigonométriques dans l'éq. (2) devient

$$2\pi n \frac{l}{k} = 2\pi(mk + r) \frac{l}{k} = 2\pi ml + 2\pi r \frac{l}{k} \quad (8)$$

Or le cosinus et le sinus sont des fonctions périodiques, avec période 2π . Par conséquent,

$$z_n = z_{mk+r} = z_r \quad (9)$$

ce qui implique que la suite $\{z_n\}$ ne prend que k valeurs distinctes, $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$ et $z_n = z_{n+k}$, pour toute valeur de n . $\square$

Ce théorème implique que seulement les éléments $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$ sont des points visibles, lorsque l'on affichera ces éléments sur le plan complexe. Mais il ne dit rien sur la forme du polygone, à k sommets, ainsi généré. Comment sa forme dépend de l'entier l , pour k fixe, reste à étudier.

2 Quelques propriétés de la suite $\{z_n\}$ pour le cas des coefficients trigonométriques

On peut poser les questions suivantes, à propos de l'expression

$$z_n = \frac{z_0 \cos(n\theta) - \sin(n\theta)}{z_0 \sin(n\theta) + \cos(n\theta)} \quad (10)$$

1. Est-il possible que $z_n = 0$?
2. Est-il possible que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$?
3. Est-il possible que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$?
4. Est-il possible que $z_n = 0/0$ ou $z_n = \infty/\infty$ pour des valeurs particulières de l'indice n ?

On peut répondre à ces questions de la manière suivante :

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

2.1 Quelques résultats empiriques

Si l'on affiche la suite $\{z_n\}$ pour différentes valeurs de k et de l on peut observer les résultats suivants :

- Les polygones peuvent être, soit “étoilés” (par exemple, pour $k = 5$ et $l = 1$) soit convexes (par exemple, pour $k = 5$ et $l = 2$.)-voire fig. 1. Un autre exemple est fourni

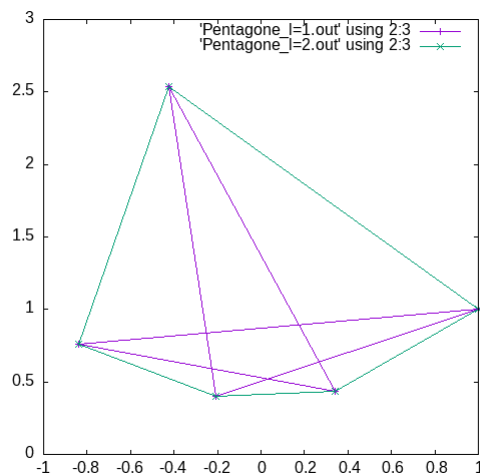


FIGURE 1 – La suite $\{z_n\}$ pour $k = 5$ et $l = 1, 2$.

par le cas $k = 7$ et $l = 1, 2$ voire fig. 2. On remarque que, pour $k = 7$, il semble y avoir

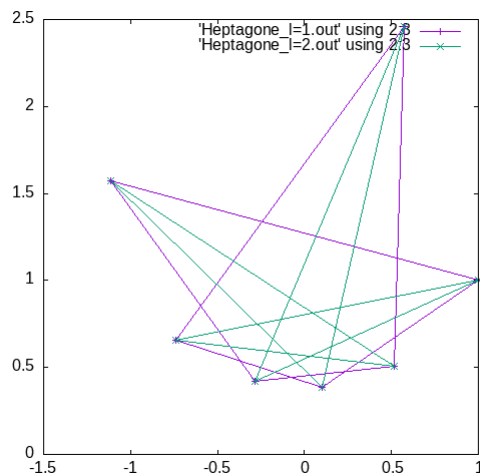


FIGURE 2 – La suite $\{z_n\}$ pour $k = 7$ et $l = 1, 2$.

plus d'une étoile possible !

En fait, si l'on poursuit ces expériences, on trouve les résultats suivants, pour les valeurs de $l > 2$ et $l < 7$, voire fig. 3.

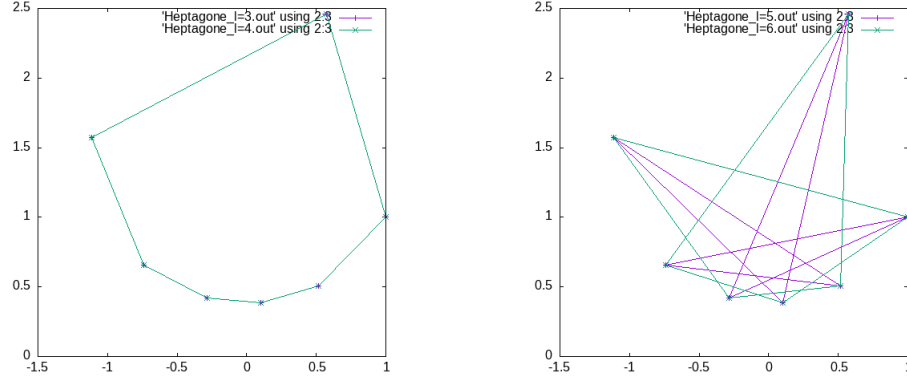


FIGURE 3 – Les suites $\{z_n\}$ pour $l = 3, 4$ et $l = 5, 6$.

Exercice 1. Discuter brièvement ces figures et quels dessins sont, vraiment, “indépendants”.

3 La projection stéréographique

Exercice 2. Montrer que la projection stéréographique, qui fait correspondre au point (x, y) du plan complexe, en dehors du cercle de rayon unité, un point (X, Y, Z) de la sphère, de rayon unité est définie par les relations

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{1-Z} \\ y &= \frac{Y}{1-Z} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} X &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \\ Y &= \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \\ Z &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \end{aligned} \quad (11)$$

Démonstration. On commence avec la démonstration de la colonne de droite, c.à.d. on cherche à exprimer X, Y et Z comme fonctions des x et y .

La première étape consiste à trouver la paramétrisation des points de la droite, qui relie le pôle nord, $(0, 0, 1)$, de la sphère avec le point (x, y) du plan complexe ; en coordonnées spatiales, $(x, y) = (x, y, 0)$.

La paramétrisation est immédiate :

$$(X(t), Y(t), Z(t)) = (0, 0, 1) + t((x, y, 0) - (0, 0, 1)) = (, ,) \quad (12)$$

Exercice 3. Remplir les entrées laissées vides dans l'éq. (12), qui expriment $X(t), Y(t)$ et $Z(t)$ comme fonctions de t .

C'est, en fait, l'équation de la droite, qui passe par les points $(0, 0, 1)$ et $(x, y, 0)$.

Il faut—et il suffit—d'imposer maintenant la contrainte que le point $(X(t), Y(t), Z(t))$ appartienne à la sphère de centre l'origine $(0, 0, 0)$ et de rayon $R = 1$ pour obtenir une équation pour t , dont les racines permettront de trouver les points d'intersection de la droite avec la sphère :

$$X(t)^2 + Y(t)^2 + Z(t)^2 = 1 \Leftrightarrow t(tx^2 + ty^2 - 2 + t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} \end{cases} \quad (13)$$

Exercice 4. Expliquer pourquoi toutes les deux valeurs de t correspondent à des points de la sphère et pourquoi il y a, nécessairement, que deux points, donc que l'équation pour t ne peut être que quadratique.

La démonstration de la colonne de gauche est similaire : On paramétrise les points de la droite comme

$$(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 1) + t((X, Y, Z) - (0, 0, 1)) = (, ,) \quad (14)$$

Exercice 5. Terminer la démonstration.

□

Maintenant on cherche, alors, à visualiser le résultat de la projection stéréographique, c.à.d. comment les dessins des sections précédentes deviennent des dessins sur la sphère.

Le résultat, pour $k = 7, l = 1$ et $z_0 = (1, 1)$ est affiché à la fig. 4. On remarque quelque

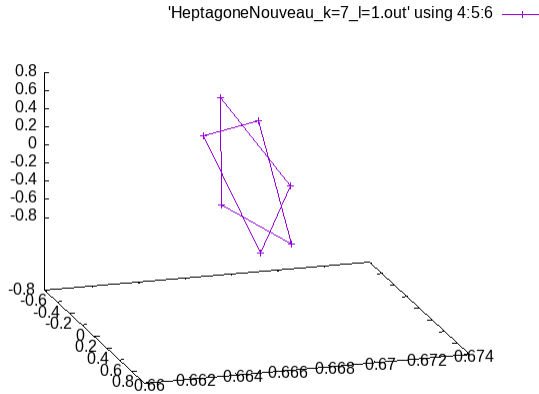


FIGURE 4 – L'image de l'heptagone, $k = 7, l = 1$, par la projection stéréographique sur la sphère unité, centrée à l'origine.

chose d'inattendu : Apparemment, $Y_n = 2y_n/(x_n^2 + y_n^2 + 1)$ semble être une constante, c.à.d. indépendante de n .

Exercice 6. S'agit-il d'une erreur dans le code, ou est-ce que c'est un effet réel, une propriété—inattendue—de la transformation de Möbius ?

Solution : On peut montrer qu'il ne s'agit pas d'erreur par la démarche suivante :

1. On écrit l'équation $Y_n = Y_0$ sous la forme suivante :

$$Y_n = Y_0 \Leftrightarrow (x_n - X_C)^2 + (y_n - Y_C)^2 = R^2 \quad (15)$$

où

$$\begin{aligned} X_C &= 0 \\ Y_C &= \frac{1}{2K} \\ R^2 &= \frac{1}{4K^2} - 1 \end{aligned} \quad (16)$$

où l'on a défini

$$K \equiv \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2 + 1} \quad (17)$$

L'éq. (15) est l'équation d'un cercle, de centre $(0, 1/(2K))$ pourvu que $R^2 > 0$. On va montrer que ceci est vrai.

La démonstration que $R^2 > 0 \Leftrightarrow 4K^2 < 1$ suit de la remarque que la dernière inégalité est équivalente à

$$(x_0^2 + (y_0 - 1)^2)(x_0^2 + (y_0 + 1)^2) > 0 \quad (18)$$

qui est évidente.

2. Il reste à montrer que les points (x_n, y_n) se trouvent, effectivement, sur un cercle ; pour l'instant, on a montré qu'il se trouvaient sur un cercle, si et seulement si Y_n était une quantité conservée.

La démonstration que les points (x_n, y_n) se trouvent bien sur un cercle est la suivante : On écrit l'équation

$$z_n = \frac{z_0 \cos(n\theta) - \sin(n\theta)}{z_0 \sin(n\theta) + \cos(n\theta)} \quad (19)$$

comme deux équations, en posant $z_n = x_n + iy_n$ et $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$\begin{aligned} A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta) &= 0 \\ C \cos(n\theta) + D \sin(n\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

desquelles on déduit que

$$\sin(n\theta) = -\frac{A}{B} \cos(n\theta) = -\frac{C}{D} \cos(n\theta) \Leftrightarrow AD - BC = 0$$

Exercice 7. Identifier les coefficients A, B, C, D en termes des x_0, y_0 et montrer que

$$AD - BC = 0 \Leftrightarrow (x_n - X_C)^2 + (y_n - Y_C)^2 = R^2$$

où X_C, Y_C et R sont les mêmes quantités que trouvées à la première étape.

Démonstration. On trouve par un calcul direct, en remplaçant $z_n = x_n + iy_n$ et $z_0 = x_0 + iy_0$ dans éq. (19), que

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{z_0 \cos(n\theta) - \sin(n\theta)}{z_0 \sin(n\theta) + \cos(n\theta)} \Leftrightarrow \\ &() \cos n\theta + () \sin n\theta = 0 \\ &() \cos n\theta + () \sin n\theta = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

ce qui nous permet de déduire que

$$A = B = C = D = \quad (22)$$

et la condition $AD - BC = 0$ se trouve être, en fait, équivalente aux éqs. (15) et (??). $\square$

Maintenant que l'on sait que les points (x_n, y_n) se trouvent sur un cercle dans le plan $Z_n = 0$ on voudrait montrer que leurs images se trouvent sur un cercle dans le plan $Y_n = Y_0$. Ceci suit de la remarque que

$$X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2 = 1 \Leftrightarrow X_n^2 + Z_n^2 = 1 - Y_n^2 = 1 - Y_0^2 \equiv r^2 > 0$$

3.1 Sens physique de la suite de Möbius

Le sens physique de ces équations est le suivant :

$$x_n^2 + (y_n - Y_C)^2 = R^2 \quad (23)$$

est l'expression pour l'énergie d'un point matériel, attaché à un ressort.

Exercice 8. Identifier la masse, la constante de rigidité et la longueur d'équilibre de ce système et discuter son utilité à modéliser le comportement de tout système physique de cette classe.

Solution : On remarque que l'éq. (23) est identique à l'expression de l'énergie totale, E , d'une masse m , attachée à un ressort de constante de rigidité k et de longueur d'équilibre l_0 , car l'équation qui exprime la définition de l'énergie totale est de la même forme, à savoir

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}k(x(t) - l_0)^2 = E \quad (24)$$

On remarque, en fait, que la loi de conservation de l'énergie totale en mécanique peut être mis en correspondance avec la propriété que $Y_n = Y_0$, ce que l'on a montré être équivalente à la propriété que les points (x_n, y_n) , sur le plan, appartenait sur un cercle.

La correspondance entre les équations (23) et (24) peut, ainsi, être présentée par le tableau 1 : Cette correspondance, cependant, entre le mouvement d'une masse attachée à un ressort et la suite, engendrée par la transformation de Möbius, n'est pas parfaite ; car les polygones étoilés ne correspondent à un tel système mécanique-il faut inclure des réflexions.

L'étude des réflexions est le sujet de la section suivante.

Méca	Möbius
t	$n\Delta t$
$x(t)$	$y_n \sqrt{\frac{2}{k}}$
$v(t)$	$x_n \sqrt{\frac{2}{m}}$
l_0	$Y_C \sqrt{\frac{2}{k}}$
E	R^2

TABLE 1 – La correspondance entre la dynamique de Möbius et la mouvement d’une masse attachée à un ressort.

4 La mécanique des réflexions

On remarque que, si l’on affiche les paires (x_n, y_n) , pour $k = 53$ et différentes valeurs de l on trouve les dessins de la fig. 5. On voudrait comprendre comment ces “trajectoires”,

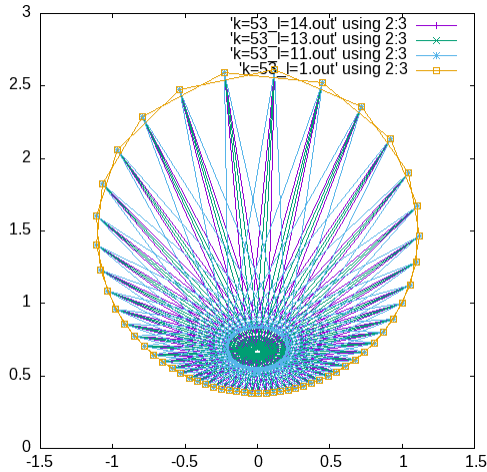


FIGURE 5 – La suite de Möbius, lorsque $k = 53$.

$(x_n, y_n) = (v_n, x_n)$ pour le modèle mécanique, dépendent du numérateur l , lorsque l’on garde le dénominateur k fixe.

Une première remarque est qu’il y a la relation suivante entre la suite $\{z_n\}$ pour une valeur l donnée et celle pour la valeur $l' = k - l$, à savoir

$$z_n(l') = z_n(k - l) = z_{-n}(l) \quad (25)$$

Exercice 9. *Montrer cette relation.*

Démonstration.

□

Ce qui nous emmène à enquêter sur la relation entre z_n et z_{-n} , pour des valeurs *fixes* de l et de k .

Si l'on fait une expérience, pour $n = 5$, on trouve les résultats suivants—cf. la table ?? :

n	x_n	y_n	x_{-n}	y_{-n}
0	1.0	1.0	1.0	1.0
1	-0.206686859579	0.401236812558	-0.837616883272	
2	-0.422151354379	2.53527205796	0.341619354786	
3	0.341619354786	0.435436137925	-0.422151354379	
4	-0.837616883272	0.759461036233	-0.206686859579	
5	1.0	1.0	1.0	1.0

Exercice 10. *Remplir la dernière colonne ;*

Les résultats de ce tableau impliquent la relation suivante :

$$z_{-n} = z_{5-n} \quad (26)$$

Que cette relation est valable pour toute valeur de n , à valeurs de k et l fixes, est exprimé par la proposition suivante :

Proposition 2. *Pour k et l fixes on a que*

$$z_{-n} = z_{k-n}$$

Exercice 11. *Démontrer cette proposition.*

Démonstration.

□

Ces propositions nous servent pour chercher de comprendre comment la taille de la région “invisible” des rayons dépend de la valeur de l à valeur fixe de k . Un exemple est fourni dans la fig. 6.

Exercice 12. *Faire des expériences numériques et discuter la dépendance de la taille de la zone “invisible” comme fonction de l pour $k = 53$. Pour quelles valeurs de l doit-on faire des expériences ?*

Solution : Si l'on fait des expériences numériques, on découvre quelque chose inattendu : Tandis que la région “invisible” semble avoir un bord lisse, si l'on regarde de plus près, on découvre que son bord “supérieur” a la forme d'une goutte, avec un coin—cf. fig. 7. Cette “découverte” pousse à remettre le sujet de l'exercice à plus tard et à se concentrer sur la compréhension de l'apparition du “coin” au bord supérieur.

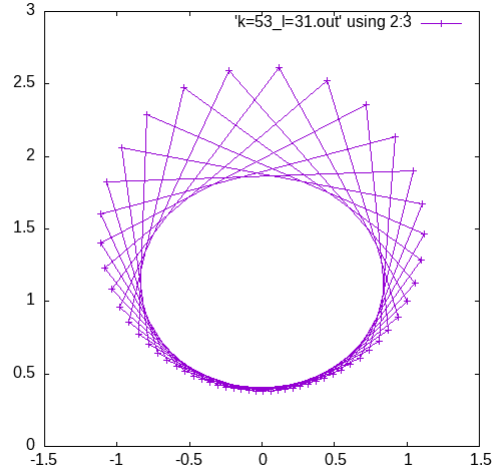


FIGURE 6 – On remarque une zone “invisible” ovale, délimitée par les rayons.

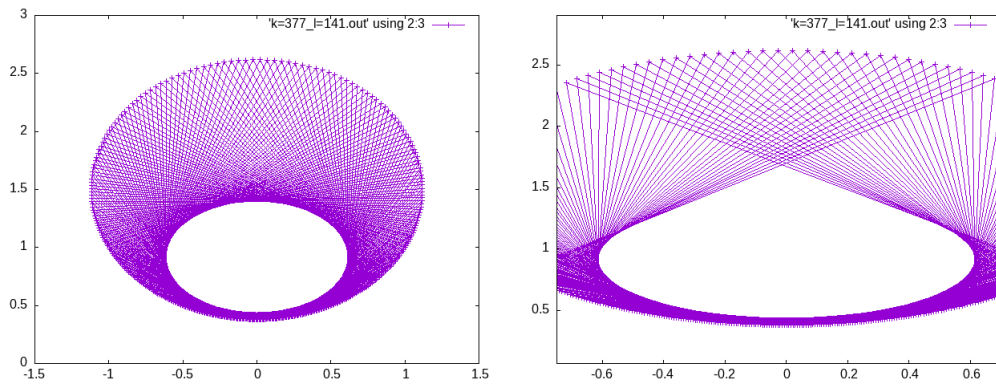


FIGURE 7 – Le cas de $k = 377$ et $l = 141$ et l’agrandissement de la région “invisible”. On note le “coin” au bord supérieur

Une indication est fournie par la remarque que les sommets du polygone ne sont pas repartés “uniformément” sur le cercle ; il semble qu’il y aurait plus à l’hémisphère sud, par rapport à l’hémisphère nord.

Une manière de comprendre leur répartition est d’étudier les valeurs possibles de l’angle polaire, ϕ_n , défini par la relation

$$z_n = x_n + iy_n \equiv X_C + iY_C + R(\cos \phi_n + i \sin \phi_n) \quad (27)$$

d’où l’on déduit que

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{y_n - Y_C}{x_n - X_C} \quad (28)$$

Exercice 13. *Pour acquérir une intuition de quelle pourrait être l’allure de la suite des valeurs de ϕ_n , calculer cette suite pour des polygones réguliers, par exemple un pentagone ou un hexagone.*

Solution : Pour un polygone régulier, convexe, on se rend compte que la suite des phases, $\{\phi_n\}$ est donné par l’expression suivante :

$$\phi_n = \phi^* + \frac{2\pi}{k}l \quad (29)$$

avec $l = 0, 1, 2, 3, \dots, k - 1$.

Pour un polygone “étoilé”, il suffit, alors de remplacer l par $l + s \bmod k$ où s est le “décalage”. La question, alors, se pose, quelles sont les valeurs de s , qui nous donnent des suites distinctes. Ces suites, pour $s > 1$, décrivent les “étoiles indépendantes”.

Exercice 14. *Trouver les valeurs possibles pour les décalages pour le pentagone et l’heptagone.*

Solution : On doit étudier les suites $\{s, s + 1, s + 2, s + 3, s + 4\} \bmod 5$ pour le pentagone et $\{s, s + 1, s + 2, s + 3, s + 4, s + 5, s + 6\} \bmod 7$ pour l’heptagone. On trouve par expérience directe, les résultats suivants :

Grâce à ce travail sur les polygones réguliers, on peut essayer de comprendre les polygones produits par les transformations de Möbius. C’est ici que l’on rencontre un problème informatique : On doit trier la liste des valeurs des phases et les fonctions de tri disponibles semblent avoir des bogues.

Si l’on calcule $\{\phi_n\}$ pour le cas $k = 377$ et $l = 141$ de la fig. 7, on trouve le résultat affiché dans la fig. 8. Mais l’on devra afficher la liste après le tri, pour comprendre les propriétés de la répartition des sommets et, donc, des “lacunes”.

5 Conclusions

A Les codes Python

Le codes python, qui ont été utilisés pour produire les figures, sont les suivants :

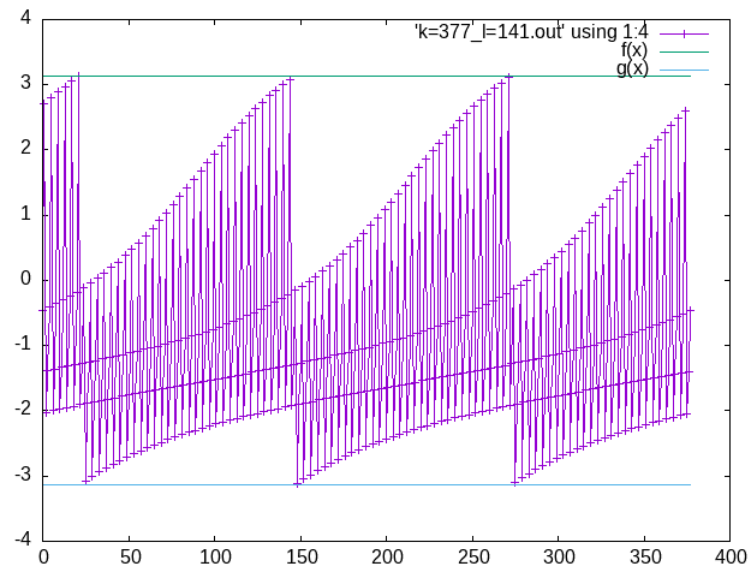


FIGURE 8 – L'angle polaire, ϕ_n , comme fonction de n .

```
import math
from math import sin, cos, radians

#theta = input()
#theta = radians(theta)

x = input()
y = input()

z = complex(x,y)

i = 0

print i, z.real, z.imag

k = input()
l = input()

theta = 2.0*math.pi*l/k

for i in range(1,k+1):
```

```

z1 = (cos(theta)*z-sin(theta))/(sin(theta)*z+cos(theta))
print i, z1.real, z1.imag
z =z1

```

Ce code produit les polygones, convexes ou étoilés.

Le code qui produit la projection stéréographique, d'une part, ainsi que la suite des angles $\{\phi_n\}$ d'autre part, est

```

import math
from math import sin, cos, radians, atan2

#theta = input()
#theta = radians(theta)

x = input()
y = input()

K = y/(x**2+y**2+1.)
YC = 1.0/(2.0*K)
phi = atan2(y-YC,x)

z = complex(x,y)

i = 0

X = 2.0*z.real/(z.real*z.real+z.imag*z.imag+1.0)
Y = 2.0*z.imag/(z.real*z.real+z.imag*z.imag+1.0)
Z = (z.real*z.real+z.imag*z.imag-1.0)/(z.real*z.real+z.imag*z.imag+1.0)
#print i, z.real, z.imag, phi, X, Y, Z, X*X+Y*Y+Z*Z

k = input()
l = input()

theta = 2.0*math.pi*l/k

for i in range(1,k+1):
    z1 = (cos(theta)*z-sin(theta))/(sin(theta)*z+cos(theta))
    X1 = 2.0*z1.real/(z1.real*z1.real+z1.imag*z1.imag+1.0)
    Y1 = 2.0*z1.imag/(z1.real*z1.real+z1.imag*z1.imag+1.0)
    Z1 = (z1.real*z1.real+z1.imag*z1.imag-1.0)/(z1.real*z1.real+z1.imag*z1.imag+1.0)
    phi = atan2(z1.imag-YC,z1.real )

```

```
#    print i, z1.real, z1.imag, phi, X1, Y1, Z1, X1*X1+Y1*Y1+Z1*Z1
    print phi
    z =z1
```

B Quelques points techniques

On peut imposer un espace horizontal dans une équation avec la commande `hskip` de la façon suivante, dans un environnement mathématique :

```
\begin{equation}
\label{slash}
D\hskip-0.27truecm/
\end{equation}
```

qui donne le résultat

$$D \hspace{-0.27cm} / \tag{30}$$

L'équation de Dirac pour un électron dans un champ électromagnétique a la forme suivante

```
\begin{equation}
\label{dirac}
\mathrm{i}\left(\eta^{\mu\nu}\gamma_{\mu}\partial_{\nu}-\right.
\left. q\eta^{\mu\nu}\gamma_{\mu}A_{\nu}\right)\psi=0\Leftrightarrow
\mathrm{i}D\hskip-0.27truecm/\,\psi=0
\end{equation}
```

$$i(\eta^{\mu\nu}\gamma_{\mu}\partial_{\nu}-q\eta^{\mu\nu}\gamma_{\mu}A_{\nu})\psi=0\Leftrightarrow iD\psi=0 \tag{31}$$