

Les transformations de Möbius

Stam Nicolis

Institut Denis Poisson
Université de Tours, Université d'Orléans, CNRS

Tours, le 21 novembre 2018

Plan

Les
transformations de
Möbius

Stam Nicolis

Les
transformations de
Möbius

Dynamique des
transformations de
Möbius

Conclusions

Les transformations de Möbius

Dynamique des transformations de Möbius

Conclusions

Les transformations de Möbius

Les
transformations de
Möbius

Stam Nicolis

Les
transformations de
Möbius

Dynamique des
transformations de
Möbius

Conclusions

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

Les transformations de Möbius

Les
transformations de
Möbius

Stam Nicolis

Les
transformations de
Möbius

Dynamique des
transformations de
Möbius

Conclusions

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

On peut se restreindre au cas où $ad - bc = 1$ et une solution de cette relation est donnée lorsque $a = \cos \theta_n$, $b = -\sin \theta_n$, $c = \sin \theta_n$ et $d = \cos \theta_n$. On peut prendre $\theta_n = \theta$ pour tout n :

$$z' = \frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta}$$

Quelques résultats mathématiques

Les
transformations de
Möbius

Stam Nicolis

Les
transformations de
Möbius

Dynamique des
transformations de
Möbius

Conclusions

Théorème (Résolution)

La suite $\{z_n\}$, pour le cas des éléments trigonométriques constants, est donnée par l'expression

$$z_n = \frac{z_0 \cos n\theta + \sin n\theta}{-z_0 \sin n\theta + \cos n\theta}$$

Théorème (Résolution)

La suite $\{z_n\}$, pour le cas des éléments trigonométriques constants, est donnée par l'expression

$$z_n = \frac{z_0 \cos n\theta + \sin n\theta}{-z_0 \sin n\theta + \cos n\theta}$$

Corollaire

La suite $\{z_n\}$, est périodique, si $\theta = 2\pi l/k$, avec période $T = k$.

Démonstration

Démonstration.

La démonstration suit par récurrence :

- On montre que c'est vrai, pour $n = 0$.

Démonstration

Démonstration.

La démonstration suit par récurrence :

- ▶ On montre que c'est vrai, pour $n = 0$.
- ▶ On montre que, si c'est vrai, pour $n = k$, alors c'est vrai pour $n = k + 1$.



On peut générer une suite $\{z_n\}$ en appliquant la transformation de Möbius de façon itérée :

$$z_{n+1} = \frac{az_n + b}{cz_n + d}$$

à partir d'un point de départ, z_0 . Un exemple est celui où $a = d = \cos \theta_n$ et $b = -c = -\sin \theta_n$ avec $\theta_n = n\theta = 2\pi n/k$.

Les polygones de Möbius et les zones “cachées”

Les
transformations de
Möbius

Stam Nicolis

Les
transformations de
Möbius

Dynamique des
transformations de
Möbius

Conclusions

Si l'on trace les suites $\{z_n\}$, sur le plan complexe, on trouve, d'une part, que les polygones peuvent être, soit convexes, soit étoilés ; d'autre part que les rayons, qui relient les sommets successifs, laissent des zones “cachées”—cf. fig. 1

Figure – Polygones convexes et étoilés. Pour les étoilés on remarque la zone “blanche”.

Conclusions

- Les transformations de Möbius réalisent une correspondance entre un nombre complexe z_n et un autre nombre complexe z_{n+1} .
Si les coefficients de la transformation peuvent être exprimés en termes de fonctions trigonométriques, la correspondance “hérite” les propriétés de périodicité de celles-ci : Si $\theta = 2\pi/k$, alors, $k\theta = 2\pi$ et $z_k = z_0$, par conséquent, la période est $T = k$.

Conclusions

- ▶ Les transformations de Möbius réalisent une correspondance entre un nombre complexe z_n et un autre nombre complexe z_{n+1} .
Si les coefficients de la transformation peuvent être exprimés en termes de fonctions trigonométriques, la correspondance “hérite” les propriétés de périodicité de celles-ci : Si $\theta = 2\pi/k$, alors, $k\theta = 2\pi$ et $z_k = z_0$, par conséquent, la période est $T = k$.
- ▶ Si θ_n prend deux valeurs, de façon alternée, avec des fractions de 2π , alors ce qui est remarquable est que la suite possède *deux périodes*, une paire, $T_{\text{paire}} = 2k_0k_1$ et une, impaire, $2k_0n' + 1$, où n' est l'entier positif le plus petit qui satisfait

$$1 = mk_1 - n'(k_0 + k_1)$$

avec m entier (lorsque $l_0 = 1 = l_1$.)

► Ploum !

► Plum...

- ▶ Plim ?
- ▶ Plum...

- ▶ Ploum !
- ▶ Plim ?
- ▶ Plum...

- ▶ Plim ?
- ▶ Plum...