

Les transformations de Möbius

Stamatios Nicolis¹

*Département de Physique
Université de Tours
Parc Grandmont, 37200 Tours, France*

Résumé

Quelques exemples des transformations de Möbius.

1. E-Mail : stamatios.nicolis@univ-tours.fr

Table des matières

1	Introduction	2
2	Quelques propriétés de la suite $\{z_n\}$ pour le cas des coefficients trigonométriques	3
2.1	Quelques résultats empiriques	4
3	La projection stéréographique	5
A	Le code Python	5
B	Quelques points techniques	6

1 Introduction

Les transformations de Möbius sont définies par

$$z_{n+1} = \frac{az_n + b}{cz_n + d} \quad (1)$$

Un cas particulier est celui où $ad - bc = 1$. Cette relation peut être représentée par $a = \cos \theta = d, b = -c = -\sin \theta$.

Dans ce cas on peut “résoudre” la récurrence, dans le sens que l’on peut exprimer z_n en termes uniquement de z_0 et de n , sans devoir calculer tous les termes $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ de la suite qui précèdent z_n . Ceci est le résultat de la proposition suivante.

Proposition 1. *La solution de la récurrence (1), lorsque $a = \cos \theta = d, b = -c = -\sin \theta$, est donnée par l’expression*

$$z_n = \frac{z_0 \cos(n\theta) - \sin(n\theta)}{z_0 \sin(n\theta) + \cos(n\theta)} \quad (2)$$

Démonstration. 1. On montre que l’expression (2) est valable pour $n = 0$:

$$z_0 = \frac{z_0 \cos(0) - \sin(0)}{z_0 \sin(0) + \cos(0)} = z_0 \quad (3)$$

2. On fait l’hypothèse que l’expression (2) est valable pour $n = p > 0$ et l’on veut montrer qu’elle implique que

$$z_{p+1} = \frac{z_0 \cos[(p+1)\theta] - \sin[(p+1)\theta]}{z_0 \sin[(p+1)\theta] + \cos[(p+1)\theta]} \stackrel{?}{=} \frac{z_p \cos \theta - \sin \theta}{z_p \sin \theta + \cos \theta} \quad (4)$$

Pour établir cette dernière égalité, il suffit de remplacer dans le membre de droite de l’éq. (4) l’expression pour z_p , donné par l’éq. (2), pour laquelle on fait l’hypothèse qu’elle est valable pour $n = p$. Le résultat est la conséquence d’algèbre triviale, qui est basée sur les identités

$$\begin{aligned} \cos[(p \pm 1)\theta] &= \cos(p\theta) \cos \theta \mp \sin(p\theta) \sin \theta \\ \sin[(p \pm 1)\theta] &= \sin(p\theta) \cos \theta \pm \cos(p\theta) \sin \theta \end{aligned} \quad (5)$$

□

Le résultat de cette proposition est que z_n est une fonction de l’angle θ , qui est supposé connu. Un cas particulier est, lorsque θ n’est pas un nombre réel quelconque, mais est une fraction de 2π , la période des fonctions trigonométriques, c.à.d.

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{l}{k} \quad (6)$$

avec $l, k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas la suite $\{z_n\}$ est périodique, avec période k , conséquence du théorème suivant.

Théorème 1. Si θ est un multiple rationnel de 2π , $\theta = 2\pi l/k$, avec $l, k \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{z_n\}$ est périodique avec période k .

Démonstration. On peut exprimer l'entier n , de façon unique, comme

$$n = mk + r \quad (7)$$

avec $m, r \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < k$.

Par conséquent, l'argument des fonctions trigonométriques dans l'éq. (2) devient

$$2\pi n \frac{l}{k} = 2\pi(mk + r) \frac{l}{k} = 2\pi ml + 2\pi r \frac{l}{k} \quad (8)$$

Or le cosinus et le sinus sont des fonctions périodiques, avec période 2π . Par conséquent,

$$z_n = z_{mk+r} = z_r \quad (9)$$

ce qui implique que la suite $\{z_n\}$ ne prend que k valeurs distinctes, $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$ et $z_n = z_{n+k}$, pour toute valeur de n . $\square$

Ce théorème implique que seulement les éléments $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$ sont des points visibles, lorsque l'on affichera ces éléments sur le plan complexe. Mais il ne dit rien sur la forme du polygone, à k sommets, ainsi généré. Comment sa forme dépend de l'entier l , pour k fixe, reste à étudier.

2 Quelques propriétés de la suite $\{z_n\}$ pour le cas des coefficients trigonométriques

On peut poser les questions suivantes, à propos de l'expression

$$z_n = \frac{z_0 \cos(n\theta) - \sin(n\theta)}{z_0 \sin(n\theta) + \cos(n\theta)} \quad (10)$$

1. Est-il possible que $z_n = 0$?
2. Est-il possible que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$?
3. Est-il possible que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$?
4. Est-il possible que $z_n = 0/0$ ou $z_n = \infty/\infty$ pour des valeurs particulières de l'indice n ?

On peut répondre à ces questions de la manière suivante :

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

2.1 Quelques résultats empiriques

Si l'on affiche la suite $\{z_n\}$ pour différentes valeurs de k et de l on peut observer les résultats suivants :

- Les polygones peuvent être, soit “étoilés” (par exemple, pour $k = 5$ et $l = 1$) soit convexes (par exemple, pour $k = 5$ et $l = 2$.)-voire fig. 1. Un autre exemple est fourni

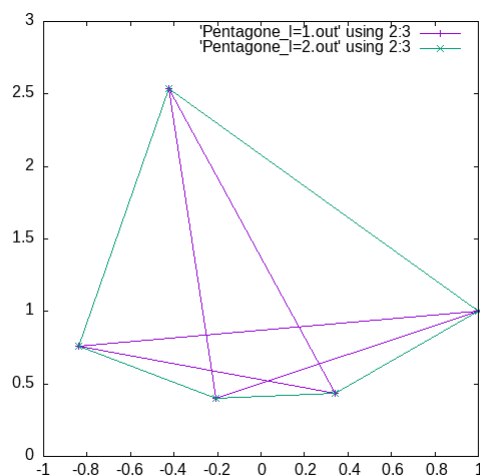


FIGURE 1 – La suite $\{z_n\}$ pour $k = 5$ et $l = 1, 2$.

par le cas $k = 7$ et $l = 1, 2$ voire fig. 2. On remarque que, pour $k = 7$, il semble y avoir

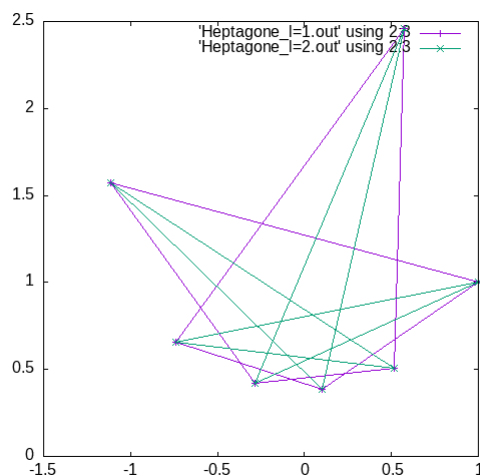


FIGURE 2 – La suite $\{z_n\}$ pour $k = 7$ et $l = 1, 2$.

plus d'une étoile possible !

En fait, si l'on poursuit ces expériences, on trouve les résultats suivants, pour les valeurs de $l > 2$ et $l < 7$, voire fig. 3.

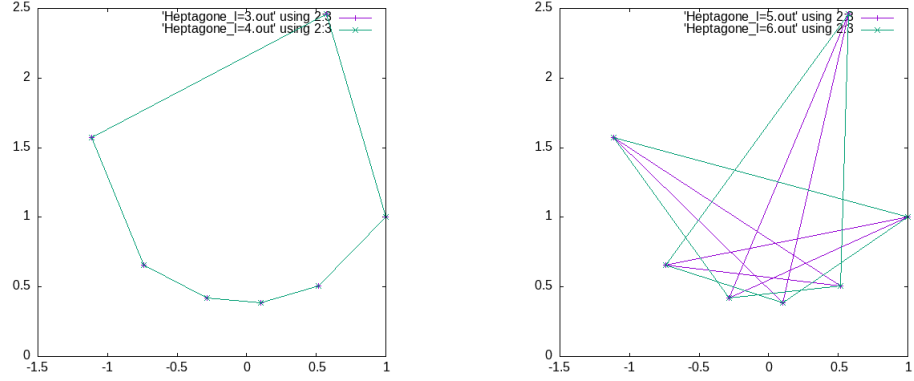


FIGURE 3 – Les suites $\{z_n\}$ pour $l = 3, 4$ et $l = 5, 6$.

Exercice 1. *Discuter brièvement ces figures et quels dessins sont, vraiment, “indépendants”.*

3 La projection stéréographique

Exercice 2. *Montrer que la projection stéréographique, qui fait correspondre au point (x, y) du plan complexe, en dehors du cercle de rayon unité, un point (X, Y, Z) de la sphère, de rayon unité est définie par les relations*

$$\begin{aligned} x = \frac{X}{1 - Z} &\Leftrightarrow \begin{aligned} X &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \\ Y &= \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \\ Z &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \end{aligned} \end{aligned} \quad (11)$$

Démonstration.

□

A Le code Python

Le code python, qui a été utilisé pour produire les figures, est le suivant :

```
import math
from math import sin, cos, radians

#theta = input()
#theta = radians(theta)
```

```

x = input()
y = input()

z = complex(x,y)

i = 0

print i, z.real, z.imag

k = input()
l = input()

theta = 2.0*math.pi*l/k

for i in range(1,k+1):
    z1 = (cos(theta)*z-sin(theta))/(sin(theta)*z+cos(theta))
    print i, z1.real, z1.imag
    z =z1

```

B Quelques points techniques

On peut imposer un espace horizontal dans une équation avec la commande `hskip` de la façon suivante, dans un environnement mathématique :

```

\begin{equation}
\label{slash}
D\hskip-0.27truecm/
\end{equation}

```

qui donne le résultat

$$D\hskip-0.27truecm/ \quad (12)$$

L'équation de Dirac pour un électron dans un champ électromagnétique a la forme suivante

```

\begin{equation}
\label{dirac}
\mathrm{i}\left(\eta^{\mu\nu}\gamma_{\mu}\partial_{\nu}-q\eta^{\mu\nu}\gamma_{\mu}A_{\nu}\right)\psi=0\Leftrightarrow
\mathrm{i}D\hskip-0.27truecm/\psi=0
\end{equation}

```

$$i(\eta^{\mu\nu}\gamma_{\mu}\partial_{\nu}-q\eta^{\mu\nu}\gamma_{\mu}A_{\nu})\psi=0\Leftrightarrow iD\psi=0 \quad (13)$$