

# Les transformations de Möbius

Stamatios Nicolis<sup>1</sup>

*Département de Physique  
Université de Tours  
Parc Grandmont, 37200 Tours, France*

## Résumé

Quelques exemples des transformations de Möbius.

---

1. E-Mail : [stamatios.nicolis@univ-tours.fr](mailto:stamatios.nicolis@univ-tours.fr)

# Table des matières

|          |                                                                                                           |          |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                                                                       | <b>2</b> |
| <b>2</b> | <b>Quelques propriétés de la suite <math>\{z_n\}</math> pour le cas des coefficients trigonométriques</b> | <b>3</b> |
| 2.1      | Quelques résultats empiriques . . . . .                                                                   | 4        |
| <b>3</b> | <b>La projection stéréographique</b>                                                                      | <b>5</b> |
| <b>A</b> | <b>Le code Python</b>                                                                                     | <b>7</b> |
| <b>B</b> | <b>Quelques points techniques</b>                                                                         | <b>7</b> |

# 1 Introduction

Les transformations de Möbius sont définies par

$$z_{n+1} = \frac{az_n + b}{cz_n + d} \quad (1)$$

Un cas particulier est celui où  $ad - bc = 1$ . Cette relation peut être représentée par  $a = \cos \theta = d, b = -c = -\sin \theta$ .

Dans ce cas on peut “résoudre” la récurrence, dans le sens que l’on peut exprimer  $z_n$  en termes uniquement de  $z_0$  et de  $n$ , sans devoir calculer tous les termes  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$  de la suite qui précèdent  $z_n$ . Ceci est le résultat de la proposition suivante.

**Proposition 1.** *La solution de la récurrence (1), lorsque  $a = \cos \theta = d, b = -c = -\sin \theta$ , est donnée par l’expression*

$$z_n = \frac{z_0 \cos(n\theta) - \sin(n\theta)}{z_0 \sin(n\theta) + \cos(n\theta)} \quad (2)$$

*Démonstration.* 1. On montre que l’expression (2) est valable pour  $n = 0$  :

$$z_0 = \frac{z_0 \cos(0) - \sin(0)}{z_0 \sin(0) + \cos(0)} = z_0 \quad (3)$$

2. On fait l’hypothèse que l’expression (2) est valable pour  $n = p > 0$  et l’on veut montrer qu’elle implique que

$$z_{p+1} = \frac{z_0 \cos[(p+1)\theta] - \sin[(p+1)\theta]}{z_0 \sin[(p+1)\theta] + \cos[(p+1)\theta]} \stackrel{?}{=} \frac{z_p \cos \theta - \sin \theta}{z_p \sin \theta + \cos \theta} \quad (4)$$

Pour établir cette dernière égalité, il suffit de remplacer dans le membre de droite de l’éq. (4) l’expression pour  $z_p$ , donné par l’éq. (2), pour laquelle on fait l’hypothèse qu’elle est valable pour  $n = p$ . Le résultat est la conséquence d’algèbre triviale, qui est basée sur les identités

$$\begin{aligned} \cos[(p \pm 1)\theta] &= \cos(p\theta) \cos \theta \mp \sin(p\theta) \sin \theta \\ \sin[(p \pm 1)\theta] &= \sin(p\theta) \cos \theta \pm \cos(p\theta) \sin \theta \end{aligned} \quad (5)$$

□

Le résultat de cette proposition est que  $z_n$  est une fonction de l’angle  $\theta$ , qui est supposé connu. Un cas particulier est, lorsque  $\theta$  n’est pas un nombre réel quelconque, mais est une fraction de  $2\pi$ , la période des fonctions trigonométriques, c.à.d.

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{l}{k} \quad (6)$$

avec  $l, k \in \mathbb{N}$ . Dans ce cas la suite  $\{z_n\}$  est périodique, avec période  $k$ , conséquence du théorème suivant.

**Théorème 1.** Si  $\theta$  est un multiple rationnel de  $2\pi$ ,  $\theta = 2\pi l/k$ , avec  $l, k \in \mathbb{N}$ , alors la suite  $\{z_n\}$  est périodique avec période  $k$ .

*Démonstration.* On peut exprimer l'entier  $n$ , de façon unique, comme

$$n = mk + r \quad (7)$$

avec  $m, r \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq r < k$ .

Par conséquent, l'argument des fonctions trigonométriques dans l'éq. (2) devient

$$2\pi n \frac{l}{k} = 2\pi(mk + r) \frac{l}{k} = 2\pi ml + 2\pi r \frac{l}{k} \quad (8)$$

Or le cosinus et le sinus sont des fonctions périodiques, avec période  $2\pi$ . Par conséquent,

$$z_n = z_{mk+r} = z_r \quad (9)$$

ce qui implique que la suite  $\{z_n\}$  ne prend que  $k$  valeurs distinctes,  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$  et  $z_n = z_{n+k}$ , pour toute valeur de  $n$ .  $\square$

Ce théorème implique que seulement les éléments  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$  sont des points visibles, lorsque l'on affichera ces éléments sur le plan complexe. Mais il ne dit rien sur la forme du polygone, à  $k$  sommets, ainsi généré. Comment sa forme dépend de l'entier  $l$ , pour  $k$  fixe, reste à étudier.

## 2 Quelques propriétés de la suite $\{z_n\}$ pour le cas des coefficients trigonométriques

On peut poser les questions suivantes, à propos de l'expression

$$z_n = \frac{z_0 \cos(n\theta) - \sin(n\theta)}{z_0 \sin(n\theta) + \cos(n\theta)} \quad (10)$$

1. Est-il possible que  $z_n = 0$ ?
2. Est-il possible que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ ?
3. Est-il possible que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ ?
4. Est-il possible que  $z_n = 0/0$  ou  $z_n = \infty/\infty$  pour des valeurs particulières de l'indice  $n$ ?

On peut répondre à ces questions de la manière suivante :

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

## 2.1 Quelques résultats empiriques

Si l'on affiche la suite  $\{z_n\}$  pour différentes valeurs de  $k$  et de  $l$  on peut observer les résultats suivants :

- Les polygones peuvent être, soit “étoilés” (par exemple, pour  $k = 5$  et  $l = 1$ ) soit convexes (par exemple, pour  $k = 5$  et  $l = 2$ .)-voire fig. 1. Un autre exemple est fourni

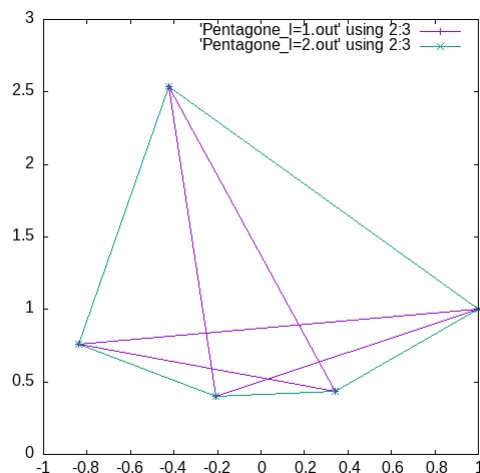


FIGURE 1 – La suite  $\{z_n\}$  pour  $k = 5$  et  $l = 1, 2$ .

par le cas  $k = 7$  et  $l = 1, 2$  voire fig. 2. On remarque que, pour  $k = 7$ , il semble y avoir

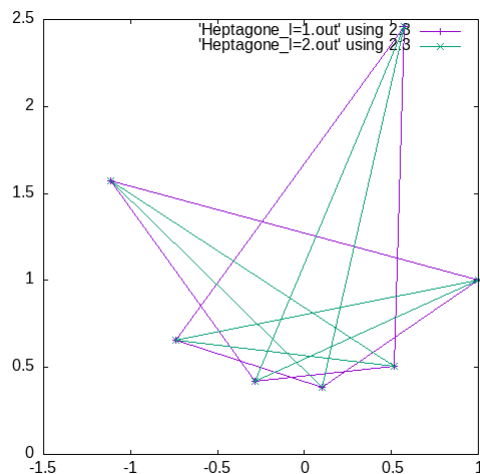


FIGURE 2 – La suite  $\{z_n\}$  pour  $k = 7$  et  $l = 1, 2$ .

plus d'une étoile possible !

En fait, si l'on poursuit ces expériences, on trouve les résultats suivants, pour les valeurs de  $l > 2$  et  $l < 7$ , voire fig. 3.

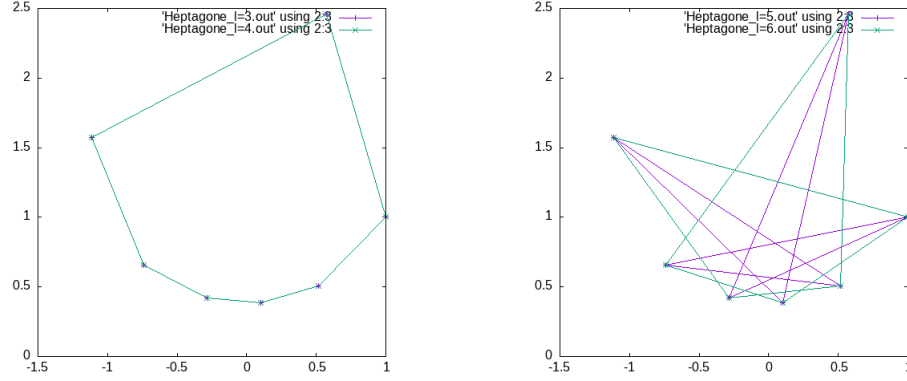


FIGURE 3 – Les suites  $\{z_n\}$  pour  $l = 3, 4$  et  $l = 5, 6$ .

**Exercice 1.** *Discuter brièvement ces figures et quels dessins sont, vraiment, “indépendants”.*

### 3 La projection stéréographique

**Exercice 2.** *Montrer que la projection stéréographique, qui fait correspondre au point  $(x, y)$  du plan complexe, en dehors du cercle de rayon unité, un point  $(X, Y, Z)$  de la sphère, de rayon unité est définie par les relations*

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{1-Z} \\ y &= \frac{Y}{1-Z} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} X &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \\ Y &= \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \\ Z &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \end{aligned} \quad (11)$$

*Démonstration.* On commence avec la démonstration de la colonne de droite, c.à.d. on cherche à exprimer  $X, Y$  et  $Z$  comme fonctions des  $x$  et  $y$ .

La première étape consiste à trouver la paramétrisation des points de la droite, qui relie le pôle nord,  $(0, 0, 1)$ , de la sphère avec le point  $(x, y)$  du plan complexe ; en coordonnées spatiales,  $(x, y) = (x, y, 0)$ .

La paramétrisation est immédiate :

$$(X(t), Y(t), Z(t)) = (0, 0, 1) + t((x, y, 0) - (0, 0, 1)) = (, , ) \quad (12)$$

**Exercice 3.** *Remplir les entrées laissées vides dans l'éq. (12), qui expriment  $X(t), Y(t)$  et  $Z(t)$  comme fonctions de  $t$ .*

C'est, en fait, l'équation de la droite, qui passe par les points  $(0, 0, 1)$  et  $(x, y, 0)$ .

Il faut—et il suffit—d'imposer maintenant la contrainte que le point  $(X(t), Y(t), Z(t))$  appartienne à la sphère de centre l'origine  $(0, 0, 0)$  et de rayon  $R = 1$  pour obtenir une équation pour  $t$ , dont les racines permettront de trouver les points d'intersection de la droite avec la sphère :

$$X(t)^2 + Y(t)^2 + Z(t)^2 = 1 \Leftrightarrow t(tx^2 + ty^2 - 2 + t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} \end{cases} \quad (13)$$

**Exercice 4.** Expliquer pourquoi toutes les deux valeurs de  $t$  correspondent à des points de la sphère et pourquoi il y a, nécessairement, que deux points, donc que l'équation pour  $t$  ne peut être que quadratique.

La démonstration de la colonne de gauche est similaire : On paramétrise les points de la droite comme

$$(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 1) + t((X, Y, Z) - (0, 0, 1)) = (, , ) \quad (14)$$

**Exercice 5.** Terminer la démonstration.

□

Maintenant on cherche, alors, à visualiser le résultat de la projection stéréographique, c.à.d. comment les dessins des sections précédentes deviennent des dessins sur la sphère.

Le résultat, pour  $k = 7, l = 1$  et  $z_0 = (1, 1)$  est affiché à la fig. 4. On remarque quelque

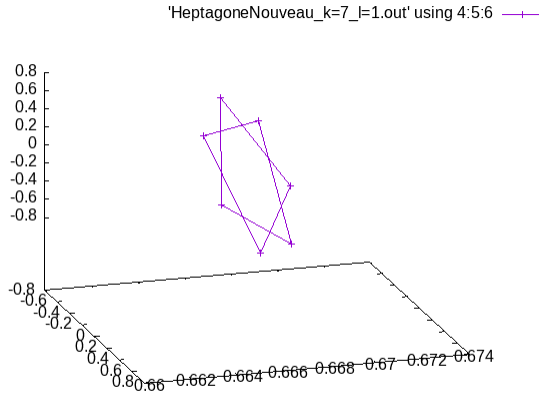


FIGURE 4 – L'image de l'heptagone,  $k = 7, l = 1$ , par la projection stéréographique sur la sphère unité, centrée à l'origine.

chose d'inattendu : Apparemment,  $Y_n = 2y_n/(x_n^2 + y_n^2 + 1)$  semble être une constante, c.à.d. indépendante de  $n$ .

**Exercice 6.** S'agit-il d'une erreur dans le code, ou est-ce que c'est un effet réel, une propriété—inattendue—de la transformation de Möbius ?

## A Le code Python

Le code python, qui a été utilisé pour produire les figures, est le suivant :

```
import math
from math import sin, cos, radians

#theta = input()
#theta = radians(theta)

x = input()
y = input()

z = complex(x,y)

i = 0

print i, z.real, z.imag

k = input()
l = input()

theta = 2.0*math.pi*l/k

for i in range(1,k+1):
    z1 = (cos(theta)*z-sin(theta))/(sin(theta)*z+cos(theta))
    print i, z1.real, z1.imag
    z =z1
```

## B Quelques points techniques

On peut imposer un espace horizontal dans une équation avec la commande `hskip` de la façon suivante, dans un environnement mathématique :

```
\begin{equation}
\label{slash}
D\hskip-0.27truecm/
\end{equation}
```

qui donne le résultat

$$\mathcal{D}$$

(15)

L'équation de Dirac pour un électron dans un champ électromagnétique a la forme suivante

```
\begin{equation}
\label{dirac}
\mathrm{i}\left(\eta^{\mu\nu}\gamma_\mu\partial_\nu-\right.
\left.
q\eta^{\mu\nu}\gamma_\mu A_\nu\right)\psi=0\Leftrightarrow
\mathrm{i}\not{D}\psi=0
\end{equation}
```

$$i(\eta^{\mu\nu}\gamma_\mu\partial_\nu - q\eta^{\mu\nu}\gamma_\mu A_\nu)\psi = 0 \Leftrightarrow i\not{D}\psi = 0 \quad (16)$$