Les transformations de Möbius

Stam Nicolis [1]

CNRS–Institut Denis Poisson (UMR7013)
Université de Tours, Université d'Orléans
Parc Grandmont, 37200 Tours, France

Résumé

Quelques exemples des transformations de Möbius.

1. E-Mail : Stam.Nicolis@lmpt.univ-tours.fr

1 Introduction

Les transformations de Möbius sont définies par

$$z_{n+1} = \frac{az_n + n}{cz_n + d} \tag{1}$$

Un cas particulier est celui où $ad - bc = 1$. Cette relation peut être représentée par $a = \cos\theta = d, b = -c = -\sin\theta$.

Si $\theta/360 = l/k$, avec $l, k \in \mathbb{N}$, l'itération est périodique ; sinon elle est non-périodique. Lorsque l'on travaille avec l'ordinateur, qui ne représente que des nombres rationnels, l'itération est, toujours, périodique–mais la période peut être très longue.

Une généralisation de cette tansformation est définie par deux angles, $\theta_0 = 360 \times l_0/k_0$ et $\theta_1 = 360 \times l_1/k_1$, avec k_0 et k_1 sans facteurs communs (indiqué par $(k_0, k_1) = 1$).

La transformation de Möbius, alors, est donnée par

$$z_{n+1} = \frac{z_n \cos\theta_n - \sin\theta_n}{z_n \sin\theta_n + \cos\theta_n} \tag{2}$$

Conjecture 1. *L'expression pour l'angle θ_n, lorsque $\theta_n = \theta_1$ pour n impair et $\theta_n = \theta_0$ pour n pair, est la suivante :*

$$\theta_n = ((1 - n\%2))\theta_0 + (n\%2)\theta_1 \tag{3}$$

et $n\%2$ indique le reste de la division de n par 2.

Démonstration. `A remplir` □