Corrigé du Devoir à la Maison du 27 avril 2020

1 Rappels sur les conventions

On se rappelle que le résultat des questions précédentes est qu'une transformation de Lorentz, qui mélange une coordonnée spatiale (par exemple la coordonnée x) et la coordonnée temporelle s'écrit sous forme matricielle comme

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}(\phi) \equiv \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

L'action de ces transformations sur les coordonnées est donnée par les expressions suivantes:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0\cosh\phi + x^1\sinh\phi \\ x^0\sinh\phi + x^1\cosh\phi \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

ce qui veut dire que la correspondance entre indices et lignes/colonnes de la matrice Λ est

$$\Lambda^{\mu\leftrightarrow\text{ligne}}_{\nu\leftrightarrow\text{colonne}} \tag{1.2}$$

2 Question 8

A partir des transformations de Lorentz

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}F^{\rho\sigma} \tag{2.1}$$

retrouver les transformations des composantes des champs électrique et magnétique, qui expriment l'invariance des équations de Maxwell sous transformations de Lorentz.

Réponse: La relation entre les composantes du tenseur $F^{\mu\nu}$ et celles des champs électrique et magnétique est la suivante:

$$\begin{aligned} &F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} \Leftrightarrow \\ &F^{0I} = \partial^0 A^I - \partial^I A^0 = -F^{I0} = -E^I \\ &F^{IJ} = \partial^I A^J - \partial^J A^I = -\varepsilon^{IJK}B^K \end{aligned} \tag{2.2}$$

On se rappelle que $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \operatorname{grad}\Phi$ et que $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$.

Ainsi: $F^{12} = -F^{21} = -B_z, F^{23} = -F^{32} = -B_x, F^{31} = -F^{13} = -B_y$; et l'on note que l'on doit identifier $-\partial^I \equiv [\text{grad}]^I$.

Maintenant, suivant la question 1, on se rend compte que l'on doit comprendre l'éq. (2.1) comme une expression entre matrices (où, heureusement, beaucoup d'éléments sont égaux à zéro):

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} F^{\rho\sigma} \Lambda^{\nu}_{\sigma} \tag{2.3}$$

Par conséquent:

$$\begin{array}{l}
E'_x = F'^{10} = \Lambda^1_{\rho} F^{\rho\sigma}\Lambda^0_{\sigma} = F^{10}\left(-\Lambda^1_0\Lambda^0_1 + \Lambda^1_1\Lambda^0_0\right) = F^{10}(\cosh^2\phi - \sinh^2\phi) = F^{10} = E_x \\
E'_y = F'^{20} = \Lambda^2_{\rho} F^{\rho\sigma}\Lambda^0_{\sigma} = \Lambda^2_2 F^{2\sigma}\Lambda^0_{\sigma} = F^{20}\Lambda^0_0 + F^{21}\Lambda^0_1 = E_y\cosh\phi + B_z\sinh\phi \\
E'_z = F'^{30} = \Lambda^3_{\rho} F^{\rho\sigma}\Lambda^0_{\sigma} = \Lambda^3_3 F^{3\sigma}\Lambda^0_{\sigma} = F^{30}\Lambda^0_0 + F^{31}\Lambda^0_1 = E_z\cosh\phi - B_y\sinh\phi \\
B'_x = F'^{32} = \Lambda^3_{\rho} F^{\rho\sigma}\Lambda^2_{\sigma} = \Lambda^3_3 F^{32}\Lambda^2_2 = F^{32} = B_x \\
B'_y = F'^{13} = \Lambda^1_{\rho} F^{\rho\sigma}\Lambda^3_{\sigma} = \Lambda^1_{\rho} F^{\rho 3}\Lambda^3_3 = \Lambda^1_0 F^{03} + \Lambda^1_1 F^{13} = -E_z\sinh\phi + B_y\cosh\phi \\
B'_z = F'^{21} = \Lambda^2_{\rho} F^{\rho\sigma}\Lambda^1_{\sigma} = \Lambda^2_2 F^{2\sigma}\Lambda^1_{\sigma} = F^{20}\Lambda^1_0 + F^{21}\Lambda^1_1 = E_y\sinh\phi + B_z\cosh\phi
\end{array} \tag{2.4}$$

(On peut retrouver les mêmes expressions en imposant que les équations de Maxwell, écrites sous leur forme "habituelle", restent invariantes, si les champs se transforment ainsi, lorsque les coordonnées se transforment sous Lorentz.)

On pourra contrôler que ces expressions sont correctes en les employant pour calculer les invariantes, qui sont le sujet des questions 9 et 10.

3 Question 9

Montrer que

$$\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} = \text{const} \times (\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) \tag{3.1}$$

est invariant sous transformations de Lorentz. Déterminer la valeur de la constante.

Réponse: Le point de départ est la propriété des transformations de Lorentz

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha}\eta^{\alpha\beta}\Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta^{\mu\nu}$$

(il faut rappeler que la démonstration de cette identité, qui peut être établi par calcul direct, était le sujet de la question 1.)

Par conséquent

$$\eta'^{\mu\nu}\eta'^{\rho\sigma}F'_{\mu\rho}F'_{\nu\sigma} = \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda^{\beta}_{\rho}F_{\alpha\beta}\Lambda^{\gamma}_{\nu}\Lambda^{\delta}_{\sigma}F_{\gamma\delta} \tag{3.2}$$

Maintenant on peut remarquer que l'on peut regrouper ces expressions de la façon suivante

$$(\Lambda^{\alpha}_{\mu}\eta^{\mu\nu}\Lambda^{\gamma}_{\nu})(\Lambda^{\beta}_{\rho}\eta^{\rho\sigma}\Lambda^{\delta}_{\sigma})F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$$

puisque l'on a montré que η était invariante sous transformations de Lorentz

Par conséquent, on peut déduire que, toute expression, où *tous* les indices sont muettes est, nécessairement, invariante sous transformations de Lorentz–pourvu que *toutes* les quantités soit se transforment, soit sont invariantes.

Maintenant l'on développe (en se rappelant que η est une matrice diagonale):

$$\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} = \eta^{00}\eta^{\rho\sigma}F_{0\rho}F_{0\sigma} + \eta^{II}\eta^{\rho\sigma}F_{I\rho}F_{I\sigma} = \eta^{00}\eta^{II}F_{0I}F_{0I} + \eta^{II}\eta^{00}F_{I0}F_{I0} + \eta^{II}\eta^{JJ}F_{IJ}F_{IJ} = -2\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + 2\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = -2(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{B})$$

et l'on déduit que la constante est égale à -2. Par conséquent, $-2(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})$ est (a) invariant sous transformations de Lorentz; (b) invariant sous transformations de jauge (il est fonction seulement des champs électrique et magnétique); (c) en tant que fonction des potentiels A_μ ne contient que des dérivées secondes dans les coordonnées; par conséquent pourra contribuer au Lagrangien du champ électromagnétique; et (d) n'est pas une somme de termes qui sont des dérivées totales, donc pourra décrire les équations de Maxwell (comme on verra à la question 12).

4 Question 10

Montrer que

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \tag{4.1}$$

est invariant sous transformations de Lorentz. Montrer à partir de $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\Phi - \dot{\mathbf{A}}$ *et* $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\times\mathbf{A}$ *que* $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ *est une somme de dérivées par rapport aux coordonnées d'espace et du temps.*

Réponse: En ce qui concerne la première partie (que $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ est invariant sous une transformation de Lorentz):

A partir de la correspondance entre composantes des champs électrique et magnétique et les composantes du tenseur F et comment se transforment les composantes du tenseur $F^{\mu\nu}$, on a obtenu les expressions (2.4). On calcule, alors, les deux membres de l'identité

$$\mathbf{E}'\cdot\mathbf{B}' \stackrel{?}{=} \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$$

qui exprimerait l'invariance sous transformations de Lorentz et l'on trouve que c'est, effectivement, une identité.

Cette identité n'est pas évidente car l'identification des champs électrique et magnétique dépend du référentiel, ce qui est exprimé par le fait que $F'^{\mu\nu} \neq F^{\mu\nu}$. Qu'elle est évidente est le sujet de la question 11, où l'on montre que $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ peut être écrit sous une forme où l'invariance de Lorentz est manifeste.

En ce qui concerne la deuxième partie (que c'est une somme de dérivées):

En exprimant $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ en termes des potentiels, on trouve:

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = \left(-\dot{\mathbf{A}} - \mathrm{grad}\,\Phi\right)\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = -\dot{\mathbf{A}}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{A} - (\mathrm{grad}\,\Phi)\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$$

En composantes:

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = \dot{A}_I\varepsilon_{IJK}\partial_J A_K + (\partial_I\Phi)\varepsilon_{IJK}\partial_J A_K = \varepsilon_{IJK}\left(\dot{A}_I\partial_J A_K + (\partial_I\Phi)\partial_J A_K\right)$$

Le premier terme entre parenthèses peut être écrit sous la forme

$$\dot{A}_I \partial_J A_K = \frac{\partial}{\partial t}(A_I \partial_J A_K) - A_I \partial_J \dot{A}_K = \frac{\partial}{\partial t}(A_I \partial_J A_K) - \partial_J (A_I \dot{A}_K) + \partial_J A_I \dot{A}_K \Leftrightarrow$$
$$\dot{A}_I (\partial_J A_K) - \dot{A}_K (\partial_J A_I) = \frac{\partial}{\partial t}(A_I \partial_J A_K) - \partial_J (A_I \dot{A}_K)$$

On remarque que le seconde membre est une somme de dérivées.

Maintenant on note que

$$\varepsilon_{IJK} \dot{A}_I (\partial_J A_K) = -\varepsilon_{IJK} \dot{A}_K (\partial_J A_I)$$

Par conséquent

$$\varepsilon_{IJK} \dot{A}_I (\partial_J A_K) = \frac{\varepsilon_{IJK}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t}(A_I \partial_J A_K) - \partial_J (A_I \dot{A}_K) \right)$$

donc c'est une somme de dérivées.

Le deuxième terme:

$$(\partial_I \Phi) \partial_J A_K = \partial_I (\Phi \partial_J A_K) - \Phi \partial_I \partial_J A_K$$

On remarque que $-\Phi \partial_I \partial_J A_K = -\Phi \partial_J \partial_I A_K$, par conséquent, lorsque l'on multiplie ce terme avec $\varepsilon_{IJK} = -\varepsilon_{JIK}$, on trouve 0.

Ainsi

$$\varepsilon_{IJK} (\partial_I \Phi) \partial_J A_K = \varepsilon_{IJK} \partial_I (\Phi \partial_J A_K) = \partial_I (\varepsilon_{IJK} \Phi \partial_J A_K)$$

une autre somme de dérivées.

Finalement on déduit que

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{\varepsilon_{IJK}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t}(A_I \partial_J A_K) - \partial_J (A_I \dot{A}_K) \right) + \partial_I (\varepsilon_{IJK} \Phi \partial_J A_K)$$

On en conclut que ce terme: (a) est invariant sous transformations de Lorentz; (b) est invariant de jauge (car **E** et **B** le sont) et (c) contient au plus deux dérivées; donc il peut être un terme qui contribuerait au Lagrangien. Mais, comme c'est une somme de dérivées, il ne pourra pas contribuer aux équations du mouvement, qui sont les équations de Maxwell. (Comme on apprend dans le cours de Mécanique Analytique, les termes du Lagrangien, qui peuvent être écrits comme des dérivées totales, ne contribuent pas aux équations d'Euler–Lagrange.)

5 Question 12

Si l'on définit l'action du champ électromagnétique par l'expression

$$S[A] = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} + \frac{\alpha}{2} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu)^2 - k \eta^{\mu\nu} J_\mu A_\nu \right\} \tag{5.1}$$

déterminer la valeur des constantes α et k pour que les équations d'Euler–Lagrange,

$$\delta S \equiv S[A+\delta A] - S[A] = \int d^4x\, \delta A_\mu \frac{\delta S[A]}{\delta A_\mu} + O((\delta A)^2) = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta S}{\delta A_\nu} = 0 \tag{5.2}$$

prennent la forme

$$\Box A_\nu = J_\nu \tag{5.3}$$

Réponse: Les termes du Lagrangien (ou de l'action, ça revient au même) sont distincts:

$$S[A] = S_{\rm cin}[A] + S_{\rm gf}[A] + S_{\rm int}[A]$$

où

$$\begin{aligned}
S_{\rm cin}[A] &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} \right\} \\
S_{\rm gf} &= \int d^4x\, \frac{\alpha}{2}\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right)^2 \equiv \int d^4x\, \frac{\alpha}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\rho A_\sigma) \\
S_{\rm int}[A] &= \int d^4x\, \{-k\eta^{\mu\nu}J_\mu A_\nu\}
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation du mouvement devient

$$\frac{\delta S[A]}{\delta A_\nu(x)} = \frac{\delta S_{\rm cin}[A]}{\delta A_\nu(x)} + \frac{\delta S_{\rm gf}[A]}{\delta A_\nu(x)} + \frac{\delta S_{\rm int}[A]}{\delta A_\nu(x)} = 0$$

Ainsi, l'on cherche à exprimer la variation $\delta S[A]$ sous la forme

$$\delta S[A] = \int d^4x\, \delta A_\nu(x)\mathcal{O}[A]^\nu \Leftrightarrow \frac{\delta S}{\delta A_\nu(x)} = \mathcal{O}[A]^\nu = 0$$

La contribution du terme de la source à la variation de l'action est

$$S_{\rm int}[A] = -k\int d^4x\, \eta^{\mu\nu}J_\mu(x)A_\nu(x) \Rightarrow \delta S_{\rm int}[A] = S_{\rm int}[A+\delta A] - S_{\rm int}[A] \approx -k\int d^4x\, \eta^{\mu\nu}J_\mu(x)\delta A_\nu(x)$$

Par conséquent, sa contribution à l'équation du mouvement est

$$\frac{\delta S_{\rm int}[A]}{\delta A_\nu(x)} = -k\eta^{\mu\nu}J_\mu(x)$$

Ls deux autres termes sont quadratiques

$$\delta S_{\rm gf}[A] = \frac{\alpha}{2}\int d^4x\, \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\left[\partial_\mu\delta A_\nu\partial_\rho A_\sigma + \partial_\mu A_\nu\partial_\rho\delta A_\sigma\right]$$

Ici il faut faire des intégrations par parties, pour dégager des termes proportionnels aux composantes de A:

$$-\alpha\int d^4x\, \delta A_\nu(x)\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma$$

En ce qui concerne $S_{\rm cin}[A]$, il est utile, d'abord, de le développer:

$$S_{\rm cin}[A] = \int d^4x\,\left\{-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}\right\} = \int d^4x\,\left\{-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\left(\partial_\mu A_\rho - \partial_\rho A_\mu\right)\left(\partial_\nu A_\sigma - \partial_\sigma A_\nu\right)\right\} =$$
$$\int d^4x\,\left\{-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\left(\partial_\mu A_\rho\partial_\nu A_\sigma + \partial_\rho A_\mu\partial_\sigma A_\nu - \partial_\mu A_\rho\partial_\sigma A_\nu - \partial_\rho A_\mu\partial_\nu A_\sigma\right)\right\}$$

Maintenant, comme on voudrait calculer la variation par rapport aux composantes de A, on va écrire les produits de champs et de dérivées de la façon suivante:

$$\begin{array}{rcl}
\partial_\mu A_\rho\partial_\nu A_\sigma & = & \partial_\mu\left(A_\rho\partial_\nu A_\sigma\right) - A_\rho\partial_\mu\partial_\nu A_\sigma \\
\partial_\rho A_\mu\partial_\sigma A_\nu & = & \partial_\rho\left(A_\mu\partial_\sigma A_\nu\right) - A_\mu\partial_\rho\partial_\sigma A_\nu \\
-\partial_\mu A_\rho\partial_\sigma A_\nu & = & -\partial_\mu\left(A_\rho\partial_\sigma A_\nu\right) + A_\rho\partial_\mu\partial_\sigma A_\nu \\
-\partial_\rho A_\mu\partial_\nu A_\sigma & = & -\partial_\rho\left(A_\mu\partial_\nu A_\sigma\right) + A_\mu\partial_\rho\partial_\nu A_\sigma
\end{array}$$

On remarque que les premiers termes de chaque ligne sont des dérivées totales, donc on pourra les oublier, dans ce qui suit.

Les autres termes contribuent à l'action de la façon suivante:

$$S_{\rm cin}[A] = \int d^4x\,\left\{-\frac{1}{4}\left[\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}(-A_\rho\partial_\mu\partial_\nu A_\sigma) + \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}(-A_\mu\partial_\rho\partial_\sigma A_\nu) + \right.\right.$$
$$\left.\left.\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}(+A_\rho\partial_\mu\partial_\sigma A_\nu) + \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}(+A_\mu\partial_\rho\partial_\nu A_\sigma)\right]\right\}$$

Maintenant, on sait que

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \Box = \eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma$$

qui est l'opérateur d'Alembertien. Aussi que

$$\eta^{\rho\sigma}(-A_\rho\Box A_\sigma) = \eta^{\mu\nu}(-A_\mu\Box A_\nu)$$

puisqu'il 'agit de deux expressions identiques, dans lesquelles on somme sur les mêmes indices.

Par conséquent

$$-\frac{1}{4}\left\{\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}(-A_\rho\partial_\mu\partial_\nu A_\sigma) + \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}(-A_\mu\partial_\rho\partial_\sigma A_\nu)\right\} = \frac{1}{2}A_\nu\eta^{\nu\mu}\Box A_\mu$$

De même, les autres termes,

$$\begin{array}{c}
\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}A_\rho\partial_\mu\partial_\sigma A_\nu = \eta^{\rho\sigma}A_\rho\partial_\sigma\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\right) = \\
\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}A_\mu\partial_\rho\partial_\nu A_\sigma = \eta^{\mu\nu}A_\mu\partial_\nu\left(\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma\right) = \\
A_\rho\eta^{\mu\nu}\left(\eta^{\rho\sigma}\partial_\sigma\partial_\mu\right)A_\nu = A_\mu\eta^{\mu\nu}\left(\eta^{\rho\sigma}\partial_\nu\partial_\rho\right)A_\sigma
\end{array}$$

Ainsi

$$S_{\rm cin}[A] = \int d^4x\,\left\{\frac{1}{2}\left[A_\mu\eta^{\mu\nu}\Box A_\nu - A_\mu\eta^{\mu\nu}\left(\eta^{\rho\sigma}\partial_\nu\partial_\rho\right)A_\sigma\right]\right\}$$

On peut, maintenant, exploiter le fait que l'on somme sur les indices pour écrire cette expression comme

$$S_{\text{cin}}[A] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \left[A_\mu \eta^{\mu\nu} \Box A_\nu - A_\mu \eta^{\mu\rho} \partial_\rho \eta^{\sigma\nu} \partial_\sigma A_\nu \right] \right\} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu \left[\eta^{\mu\nu} \Box - \eta^{\mu\rho} \partial_\rho \eta^{\sigma\nu} \partial_\sigma \right] A_\nu \right\} =$$
$$\int d^4x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu \left[\eta^{\mu\nu} \Box - \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu \right\}$$

Par conséquent, on peut écrire la variation $\delta S_{\text{cin}}[A]$ sous la forme

$$\delta S_{\text{cin}}[A] = \int d^4x \, \delta A_\nu(x) \, \left\{ \eta^{\nu\mu} \Box - \partial^\nu \partial^\mu \right\} A_\mu(x)$$

et la variation totale de l'action est donnée par l'expression

$$\delta S = \int d^4x \, \delta A_\nu(x) \left\{ [\eta^{\mu\nu} \Box - \partial^\mu \partial^\nu] A_\mu - \alpha \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma - k \eta^{\mu\nu} J_\mu \right\} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\delta S}{\delta A_\nu} = [\eta^{\mu\nu} \Box - (\alpha + 1) \partial^\mu \partial^\nu] A_\mu - k \eta^{\mu\nu} J_\mu = 0$$

On note que l'on doit poser $\alpha = -1$ et $k = 1$ pour que cette dernière expression soit égale à

$$\Box A^\nu - J^\nu = 0 \Leftrightarrow \eta_{\mu\nu} \left(\Box A^\nu - J^\nu \right) = 0 \Leftrightarrow \Box A_\mu - J_\mu = 0$$