Examen final : Devoir à la maison
Electrodynamique classique

Session de rattrapage

Date limite : 29 juin 2020

Stam Nicolis[1]

CNRS–Institut Denis Poisson (UMR7013)
Université de Tours, Université d'Orléans
Parc Grandmont, 37200 Tours, France

Choisir **un** sujet.

1. E-Mail : Stam.Nicolis@lmpt.univ-tours.fr

1 La charge électrique est invariante sous transformations de Lorentz

La loi de Gauss est exprimée par l'équation de Maxwell (on travaille dans le système d'unités $\varepsilon_0 = 1 = \mu_0, c = 1$)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E}(t,\mathbf{x}) = \rho(t,\mathbf{x}) \tag{1}$$

Cette équation implique que la charge électrique, Q, est donnée par l'expression

$$Q = \int d^3\mathbf{x}\,\rho(\mathbf{x},t) = \int d^3\mathbf{x}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}(t,\mathbf{x}) \tag{2}$$

Maintenant on sait que les coordonnées individuelles, $\mathbf{x}$ et t définissent un quadrivecteur, $x^\mu \equiv (t,\mathbf{x})$, que la densité est une composante du quadrivecteur du courant, $J^\mu(t,\mathbf{x}) = (\rho(t,\mathbf{x}),\mathbf{J}(t,\mathbf{x}))$–par conséquent toutes ces quantités ne sont pas *invariantes* sous transformations de Lorentz, $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, dont un exemple est fourni par les équations suivantes

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0\cosh\phi + x^1\sinh\phi \\ x'^1 &= x^0\sinh\phi + x^1\cosh\phi \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \tag{3}$$

que l'on peut écrire sous forme "matricielle", $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$.

Par contre, ce qui est remarquable est que la charge électrique, Q, définie par l'éq. (2) est invariante sous transformations de Lorentz. Le but de cet exercice est de démontrer cette proposition.

On va étudier comment se transforment les éléments du membre de droite de l'éq. (2) et montrer que, tandis que chaque élément n'est pas invariant, leur combinaison l'est.

C.à.d. on cherche à montrer que

$$\begin{aligned} &\int d^3\mathbf{x}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}(t,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}'\,\mathrm{div}'\,\mathbf{E}'(t',\mathbf{x}') \Leftrightarrow \\ &\int d^3\mathbf{x}\,\rho(t,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}'\,\rho'(t',\mathbf{x}') \Leftrightarrow \\ &\int d^3\mathbf{x}\,J^0(t,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}'\,J'^0(t',\mathbf{x}') \end{aligned}$$

Le point de départ est la conservation locale de la charge électrique, écrite comme

$$\begin{aligned} \int d^4x\left\{\frac{\partial\rho(t,\mathbf{x})}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{J}(t,\mathbf{x})\right\} = \int d^4x\,\eta_{\mu\nu}\partial^\mu J^\nu = 0 \stackrel{?}{=} \int d^4x'\,\eta_{\mu\nu}\partial'^\mu J'^\nu = \\ \int d^4x'\,\left\{\frac{\partial\rho'(t',\mathbf{x}')}{\partial t'} + \mathrm{div}'\,\mathbf{J}'(t',\mathbf{x}')\right\} \end{aligned} \tag{4}$$

puisque l'intégrande est égale à zéro (c'est ce que l'on appelle l'équation de continuité). Les quantités avec accent se réfèrent au référentiel défini par les transformations de Lorentz (3). On ne sait pas, encore, si l'annulation de $\eta_{\mu\nu}\partial^\mu J^\nu$ est invariante sous de telles transformations. C'est le sujet de la question suivante.

1. Montrer que $\eta_{\mu\nu}\partial^\mu J^\nu$ est invariant sous transformations de Lorentz, en particulier celles de l'éq. (3) en vérifiant que ces relations

   $$\eta_{\mu\nu}\partial^\mu J^\nu = \eta_{\mu\nu}\partial'^\mu J'^\nu \equiv \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho\partial^\rho\Lambda^\nu_\sigma J^\sigma$$

   sont une identité.

   C'est la réponse à cette question qui montre la validité de l'égalité entre l'intégrande sans l'accent et celle avec l'accent dans l'éq. (4). Et, puisque les intégrandes sont égales à zéro, les intégrales, le sont, aussi.

2. L'expression (2) implique que la charge Q peut, en principe, dépendre du temps. Calculer sa variation, par rapport au temps :

   $$\frac{dQ}{dt} = \int d^3\mathbf{x}\,\frac{\partial\rho(t,\mathbf{x})}{\partial t}$$

   et employer l'équation de continuité pour argumenter, sous quelles conditions dQ/dt est égale à zéro et, par conséquent, la charge ne dépend pas du temps local.

   Ce résultat implique que $dQ/dt = 0$ indépendamment du référentiel–il ne nous permet pas, encore, apparemment, de déduire que la valeur–constante–de $Q(t)$ est indépendante du référentiel. Pour montrer ceci, il faut répondre aux questions suivantes.

   Dans les questions qui suivent on va s'occuper de l'intégrande et de la mesure d'intégration. On a montré que l'ntégrande était invariante, il faut s'occuper de la mesure.

3. Montrer que d^4x est invariant sous transformations de Lorentz :

   $$d^4x' = \left|\det\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x = d^4x$$

4. Expliquer pourquoi

   $$\int d^4x\,\frac{\partial\rho(t,\mathbf{x})}{\partial t} = \int d^3\mathbf{x}\,\rho(t,\mathbf{x})$$

   (et la proposition correspondante pour l'autre référentiel).

5. En employant, par la suite, la conclusion de la première question, déduire la relation complète, qui découle de l'éq. (4) et expliquer pourquoi

   $$\int d^3\mathbf{x}\,\rho(t,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}'\,\rho'(t',\mathbf{x}')$$

   est la seule relation qui reste.

2 Quelques propriétés du moment dipolaire électrique

Le moment "monopolaire" d'une densité de charge est défini par l'expression

$$q = \int d^3\mathbf{x}\,\rho(t,\mathbf{x})$$

C'est la charge totale. Une propriété fondamentale de la charge électrique est qu'il existe de charges de signe positif et de charges de signe négatif. Par conséquent on peut toujours écrire

$$\rho(t,\mathbf{x}) = \rho_+(t,\mathbf{x}) + \rho_-(t,\mathbf{x}) \Leftrightarrow q = q_+ + q_-$$

Ainsi la charge totale peut être égale à zéro, sans que $q_+ = 0$ et $q_- = 0$.

1. Le moment dipolaire d'une densité de charge est défini par l'expression

$$\mathbf{p}(t) = \int d^3\mathbf{x}\,\mathbf{x}\,\rho(t,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}\,\mathbf{x}\,\rho_+(t,\mathbf{x}) + \int d^3\mathbf{x}\,\mathbf{x}\,\rho_-(t,\mathbf{x}) \tag{5}$$

   On note que le moment dipolaire est indépendant des coordonnées spatiales, puisque l'on intègre sur elles. (Mais la dépendance va re-apparaître, quand on essaiera de faire un changement de coordonnées, ce qui sera le sujet des questions suivantes.).

   Calculer $d\mathbf{p}(t)/dt$ et discuter pourquoi cette dérivée ne s'annule pas identiquement (dans les mêmes conditions, pour lesquelles la charge totale, q est indépendante du temps, $dq/dt = 0$).

2. On voudrait alors comprendre comment $\mathbf{p}(t)$ dépendrait du choix de l'origine des coordonnées. En faisant le changement de variables

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{R} \tag{6}$$

   montrer que, si $q \neq 0$, il est possible de trouver un vecteur $\mathbf{R}$, qui définirait un origine du système de coordonées, par rapport auquel $\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$. Quelles sont les hypothèses cachées ?

   Par contre, si $q = 0$, montrer qu'il n'est pas possible de déterminer un vecteur $\mathbf{R}$, qui pourra réaliser une translation de l'origine, vers une valeur, pour laquelle $\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$.

   Alors, on doit faire le calcul dans ce cas, à part, ce qui est le sujet de la question suivante.

3. Dans le cas où $q = 0$, comment change $\mathbf{p}(t)$, sous translations du système des coordonnées : $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{a}$, d'un vecteur $\mathbf{a}$ constant ?

4. Même question, pour le cas des rotations du système des coordonnées :

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta \\ z &= z' \end{aligned}$$

5. Montrer que $\mathbf{p}(t)$ n'est pas invariant sous transformations de Lorentz, mais il est invariant sous transformations de jauge.