Examen final : Devoir à la maison
Electrodynamique classique

CORRIGÉ

Date limite : 18 mai 2020

Stam Nicolis [1]

CNRS–Institut Denis Poisson (UMR7013)
Université de Tours, Université d'Orléans
Parc Grandmont, 37200 Tours, France

Choisir **un** sujet.

1. E-Mail : Stam.Nicolis@lmpt.univ-tours.fr

1 Des symétries "cachées" des équations de Maxwell

1. *Montrer que les équations de Maxwell, en absence de sources,*

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\mathbf{E} &= 0 \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\mathbf{B} &= 0 \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1}$$

   peuvent être écrites comme deux équations

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) \tag{2}$$

   Réponse : Il suffit de multiplier les équations pour le champ magnétique par i et les additionner aux équations pour le champ électrique.

2. *Montrer que, si* $\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}$*, est une solution de ces équations, alors*

$$\mathbf{E}(\eta)+\mathrm{i}\mathbf{B}(\eta) \equiv e^{\mathrm{i}\eta}(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) \tag{3}$$

   est une famille de solutions, quelle que soit la valeur de $\eta \in [0, 2\pi)$.
   L'intérêt de ces transformations est qu'elles mélangent le champ électrique et le champ magnétique et mettent en évidence qu'en absence de sources, ce que l'on appelle champ électrique et champ magnétique est un choix de coordonnées dans l'espace des champs.
   Réponse : Ici l'on fait l'hypothèse que η ne dépend ni de l'espace ni du temps, la transformation est la même à tout point de l'espace et tout point du temps.
   Alors on se rend compte que

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) = 0 \Leftrightarrow e^{\mathrm{i}\eta}\mathrm{div}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{div}\,\left(e^{\mathrm{i}\eta}(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B})\right) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{div}\,(\mathbf{E}(\eta)+\mathrm{i}\mathbf{B}(\eta)) = 0 \\ &\mathrm{rot}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) \Leftrightarrow e^{\mathrm{i}\eta}\mathrm{rot}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) = e^{\mathrm{i}\eta}\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) \Leftrightarrow \\ &\mathrm{rot}\,\left(e^{\mathrm{i}\eta}(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B})\right) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\mathrm{i}\eta}((\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B})\right) \Leftrightarrow \mathrm{rot}\,(\mathbf{E}(\eta)+\mathrm{i}\mathbf{B}(\eta)) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}(\eta)+\mathrm{i}\mathbf{B}(\eta)) \end{aligned}$$

   quelle que soit la valeur de η ; la seule contrainte est qu'elle soit indépendante des coordonnées, pour que $e^{\mathrm{i}\eta}$ "passe à travers" les dérivées.

3. *Si l'on introduit les sources "connues",* ρ *et* $\mathbf{J}$ *dans les équations de Maxwell, montrer que les équations (2) prennent la façon suivante :*

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) = \rho \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) + \mathrm{i}\mathbf{J} \tag{4}$$

Réponse : La réponse, encore une fois, est immédiate : Il suffit d'ajouter les sources "connues" aux équations de Maxwell

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\mathrm{div}\,\mathbf{E} & = & \rho & \quad & \mathrm{rot}\,\mathbf{E} & = & -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\mathrm{div}\,\mathbf{B} & = & 0 & \quad & \mathrm{rot}\,\mathbf{B} & = & \mathbf{J}+\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}
\end{array}
$$

de multiplier les équations pour le champ magnétique par i et les ajouter aux équations pour le champ électrique pour déduire que

$$
\mathrm{div}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) = \rho \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) + \mathrm{i}\mathbf{J}
$$

Maintenant on réalise les transformations (3) dans ces équations.
Montrer que, si les sources se transforment, également, comme :

$$
\begin{array}{l}
\rho(\eta)+\mathrm{i}\varrho(\eta) = e^{\mathrm{i}\eta}\rho \\
\mathbf{J}(\eta)+\mathrm{i}\mathcal{J}(\eta) = e^{\mathrm{i}\eta}\mathbf{J}
\end{array} \tag{5}
$$

alors les équations restent invariantes.
Réponse : Encore une fois, on multiplie membres de gauche et de droite par $e^{\mathrm{i}\eta}$ et l'on exploite la propriété que η est indépendante des coordonnées pour faire "passer" ce facteur (non–nul !) "à travers" les dérivées.
Quelle est l'interprétation des nouvelles sources ϱ et $\mathcal{J}$? Ecrire les expressions de $\rho(\eta), \varrho(\eta)$, $\mathbf{J}(\eta)$ et $\mathcal{J}(\eta)$.
Réponse : C'est ici que l'on se rend compte que ces manipulations–apparemment triviales–impliquent, en fait, quelque chose de non–trivial.
Si l'on écrit les équations pour $\mathbf{E}(\eta)+\mathrm{i}\mathbf{B}(\eta)$ on a que

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{div}\,(\mathbf{E}(\eta)+\mathrm{i}\mathbf{B}(\eta)) = (\cos\eta+\mathrm{i}\sin\eta)\rho = \rho\cos\eta + \mathrm{i}\rho\sin\eta \\
\mathrm{rot}\,(\mathbf{E}(\eta)+\mathrm{i}\mathbf{B}(\eta)) = \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{E}(\eta)+\mathrm{i}\mathbf{B}(\eta)) + \mathrm{i}\mathbf{J}(\cos\eta+\mathrm{i}\sin\eta)
\end{array}
$$

Les équations pour le champ électrique $\mathbf{E}(\eta)$ et le champ magnétique $\mathbf{B}(\eta)$ deviennent

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\mathrm{div}\,\mathbf{E}(\eta) & = & \rho(\eta)\equiv\rho\cos\eta & \quad & \mathrm{rot}\,\mathbf{E}(\eta) & = & -\mathbf{J}\sin\eta - \dfrac{\partial \mathbf{B}(\eta)}{\partial t} \equiv -\mathcal{J}(\eta) - \dfrac{\partial \mathbf{B}(\eta)}{\partial t} \\
\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\eta) & = & \varrho(\eta)\equiv\rho\sin\eta & \quad & \mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\eta) & = & \mathbf{J}\cos\eta + \dfrac{\partial \mathbf{E}(\eta)}{\partial t} \equiv \mathbf{J}(\eta) + \dfrac{\partial \mathbf{E}(\eta)}{\partial t}
\end{array}
$$

et l'on remarque que ces transformations ont introduit des termes, apparemment, nouveaux, dans les équations de Maxwell.
Leur interprétation est, assez directe : $\rho(\eta)$ peut être identifiée à la densité de la charge électrique, car elle est identifiée avec le membre de droite de la loi de Gauss.

La charge électrique serait, alors, égale à

$$Q_{\rm e} = \int d^3\mathbf{x}\, \rho(\eta) = \int d^3\mathbf{x}\, \rho\cos\eta = \cos\eta \int d^3\mathbf{x}\, \rho$$

et l'on remarque que la charge électrique n'est pas, *a priori*, bien définie–elle dépend de la valeur de l'angle η.

La nouveauté est que ces expressions impliquent, alors, l'existence de charges magnétiques, de densité $\rho\sin\eta$; l'équation de Maxwell div $\mathbf{B}(\eta) = 0$ serait remplacée par la généralisation, div $\mathbf{B}(\eta) = \rho\sin\eta \equiv \varrho(\eta)$ et la charge magnétique correspondante serait, alors, égale à

$$Q_{\rm m} = \int d^3\mathbf{x}\, \varrho(\eta) = \int d^3\mathbf{x}\, \rho\sin\eta = \sin\eta \int d^3\mathbf{x}\, \rho$$

On note que, ni $Q_{\rm e}$, ni $Q_{\rm m}$ semblent bien définies, car elles dépendent, toutes les deux, de l'angle η ; mais il existe une combinaison, $Q \equiv \sqrt{Q_{\rm e}^2 + Q_{\rm m}^2}$, qui est indépendante de η.

De même, le courant électrique, $\mathbf{J}(\eta) = \mathbf{J}\cos\eta$, dépend de l'angle η, tout comme le courant magnétique, $\mathcal{J}(\eta) = \mathbf{J}\sin\eta$.

Peut-on trouver une valeur réelle particulière du paramètre η, telle que $\varrho(\eta) = 0$ et $\mathcal{J}(\eta) = \mathbf{0}$? (Ce qui est cohérent avec ce que l'on sait jusqu'à maintenant.) Cette valeur est-elle unique ?

En conclusion, la liberté de modifier les champs électrique et magnétique, selon les transformations (3) est-elle compatible avec l'existence seulement de charges électriques et courants électriques ? La loi de conservation de la charge électrique reste-elle valable ?

Réponse : De la réponse à la question précédente on déduit que $\varrho(\eta) = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$ ou $\sin\eta = 0$. De même $\mathcal{J}(\eta) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{J} = \mathbf{0}$ ou $\sin\eta = 0$. Par conséquent, soit on n'a pas de sources du tout, soit $\sin\eta = 0$; cette équation possède un nombre infini de solutions, $\eta = n\pi$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Mais la périodicité du sinus implique que toutes ces solutions appartiennent à deux familles, à un élément chacune, $n = 0 \Leftrightarrow \eta = 0$ ou $n = 1 \Leftrightarrow \eta = \pi$.

La solution $\eta = 0$ veut dire pas de rotation du tout, ce qui veut dire que l'on n'a pas de liberté de réaliser une telle transformation du tout.

Par contre, la solution $\eta = \pi$ veut dire que $\rho(\pi) = -\rho$, $\varrho(\pi) = 0$, $\mathbf{J}(\pi) = -\mathbf{J}$ et $\mathcal{J}(\pi) = 0$. Par conséquent, si l'on commence avec des charges électriques et courant électriques seulement, on ne génère pas de charges magnétiques ou de courants magnétiques ; mais l'on change le signe de la charge électrique et le signe du courant électrique. Ainsi cette transformation consiste à changer le signe de la charge électrique.

Pour les champs ça implique que $\mathbf{E}(\pi) + \mathrm{i}\mathbf{B}(\pi) = -(\mathbf{E} + \mathrm{i}\mathbf{B}) \Leftrightarrow \mathbf{E}(\pi) = -\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}(\pi) = -\mathbf{B}$.

On se rend, ainsi, compte que si cette liberté se réduit au changement de signe de la charge électrique, elle est compatible avec l'existence juste des charges électriques et courants électriques. Par contre, si l'on peut réaliser des rotations d'un angle η quelconque, alors, on aura, inévitablement, des charges magnétiques.

Un cas intéressant est lorsque $\eta = \pi/2$, alors $\mathbf{E}(\pi/2) = \mathbf{B}(0)$ et $\mathbf{B}(\pi/2) = -\mathbf{E}(0)$, ce qui produirait pour les sources que $\rho(\pi/2) = 0$ et $\varrho(\pi/2) = \rho(0)$; avec cette transformation on échange charges électrique et magnétique.

En ce qui concerne la conservation de la charge électrique, on note que les équations

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\,(\mathbf{E}(\eta)+\mathrm{i}\mathbf{B}(\eta)) = (\cos\eta+\mathrm{i}\sin\eta)\rho = \rho\cos\eta+\mathrm{i}\rho\sin\eta = \rho(\eta)+\mathrm{i}\varrho(\eta)\\
&\mathrm{rot}\,(\mathbf{E}(\eta)+\mathrm{i}\mathbf{B}(\eta)) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{E}(\eta)+\mathrm{i}\mathbf{B}(\eta)) + \mathrm{i}\mathbf{J}(\cos\eta+\mathrm{i}\sin\eta) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{E}(\eta)+\mathrm{i}\mathbf{B}(\eta)) + \mathrm{i}\,(\mathbf{J}(\eta)+\mathrm{i}\mathcal{J}(\eta))
\end{aligned}$$

impliquent que

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\rho(\eta)+\mathrm{i}\varrho(\eta)) + \mathrm{div}\,\left(\mathbf{J}(\eta)+\mathrm{i}\mathcal{J}(\eta)\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t}\rho(\eta)+\mathrm{div}\,\mathbf{J}(\eta)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\varrho(\eta)+\mathrm{div}\,\mathcal{J}(\eta)=0 \end{array}\right.$$

ce qui implique que pour, toute valeur de η, charge électrique et charge magnétique sont, séparément, conservées. Mais la notion de la charge électrique et magnétique n'est pas bien définie, puisque une rotation de η peut changer ce que l'on appelle charge électrique et magnétique. Seule la charge totale reste invariante.

4. *On sait que les transformations de Lorentz mélangent les champs électrique et magnétique et que les quantités invariantes sous transformations de Lorentz sont les combinaisons*

$$I_1 = -2(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) \quad \text{et} \quad I_2 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \tag{6}$$

Comment ces quantités dépendent-elles du paramètre η, lorsque l'on calcule les I_1 et I_2, pour les champs $\mathbf{E}(\eta)$ et $\mathbf{B}(\eta)$? Y a-t-il des valeurs pour η, pour lesquelles I_1 et I_2 sont indépendantes de η ? Pourquoi ces valeurs seraient-elles "spéciales" ?

Réponse : On se rend compte que

$$-\frac{I_1}{2}+2\mathrm{i}I_2 = (\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B})^2$$

Par conséquent, sous une transformation par un angle η quelconque, ces quantités ne sont pas invariantes, puisque le membre de droite se transforme en $e^{2\mathrm{i}\eta}(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B})^2$.

Cette relation nous donne la définition des $I_1(\eta)$ et $I_2(\eta)$:

$$\begin{aligned}
&-\frac{I_1(\eta)}{2}+2\mathrm{i}I_2(\eta) = e^{2\mathrm{i}\eta}\left(-\frac{I_1(0)}{2}+2\mathrm{i}I_2(0)\right) \Leftrightarrow\\
&I_1(\eta) = I_1(0)\cos 2\eta - 4I_2(0)\sin 2\eta\\
&4I_2(\eta) = I_1(0)\sin 2\eta + 4I_2(0)\cos 2\eta
\end{aligned}$$

Elles impliquent que, pour $\eta=\pi n$, avec $n\in\mathbb{Z}$, ces quantités sont, en effet, indépendantes de l'angle η.

La raison pourquoi ces valeurs seraient "spéciales" est que les quantités I_1 et I_2 sont les invariantes sous transformations de Lorentz, par conséquent elles ne peuvent dépendre de l'angle η. Car le choix de ce que c'est un champ électrique et un champ magnétique, bien entendu, dépend du référentiel ; les I_1 et I_2 non. Par conséquent, deux solutions des équations de Maxwell sont équivalentes, si et seulement si elles produisent, aussi, la même valeur pour chacune des invariantes I_1 et I_2. Si $(I_1, I_2) \neq (I_1', I_2')$, les deux solutions ne sont pas équivalentes.

On vient de se rendre compte que l'égalité des invariantes ne semble être possible que si $\eta = 0$ ou $\eta = \pi$. Le cas $\eta = 0$ est la transformation identité.

Le cas $\eta = \pi$ change le signe de la charge électrique–dit autrement, il décrit un système, dans lequel le signe de la charge électrique, le signe du courant et le signe des champs sont tous renversés–si le système d'origine ne consiste que des charges et courants électriques. Dit autrement, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ est une solution pour densité de charge électrique ρ et courant électrique $\mathbf{J}$, alors $-\mathbf{E}$ et $-\mathbf{B}$ est la solution pour densité de charge électrique $-\rho$ et courant électrique $-\mathbf{J}$; et vice versa.

Les choses sont plus intéressantes, en présence de charges électriques *et* magnétiques. La raison est qu'une telle situation peut être décrite par $\rho(\xi) = e^{\mathrm{i}\xi}\rho, \mathbf{J}(\xi) = e^{\mathrm{i}\xi}\mathbf{J}$ (et champs $\mathbf{E}(\xi) + \mathrm{i}\mathbf{B}(\xi) = e^{\mathrm{i}\xi}(\mathbf{E} + \mathrm{i}\mathbf{B})$, où ξ, cette fois est un nouveau paramètre, qui décrit, précisément, la "proportion" de charge éléctrique par rapport à la charge magnétique. Changer ξ veut dire changer de système physique. Par conséquent, I_1 et I_2 peuvent dépendre de ξ, vu que, pour chaque valeur de ξ, on a un autre système physique–on ne peut "compenser" un changement de la valeur de ξ par une transformation de Lorentz.

Mais les résultats précédents impliquent qu'il est possible de réaliser une rotation d'un angle $\eta = \pi$; ce qui veut dire que ξ va prendre la valeur $\xi + \pi$ sans que le système physique change ! Plus précisément, si $\rho(\xi) = \rho\cos\xi + \mathrm{i}\rho\sin\xi$, alors $\rho(\xi + \pi) = -\rho\cos\xi - \mathrm{i}\rho\sin\xi$ et la rotation par π change le signe des charges, aussi bien électrique que magnétique.

En conclusion : La symétrie "cachée" des équations de Maxwell est une rotation des champs, électrique et magnétique, la même à tout point de l'espace et chaque instant du temps. L'invariance de Lorentz réduit les valeurs d'angles possibles à deux : 0 et π. La première valeur correspond à la transformation identité, la seconde change le signe du champ électrique et du champ magnétique.

En présence de sources "connues", à savoir charges électriques et courants électriques, cette symétrie cachée fait correspondre à toute solution des équations de Maxwell une autre, qui décrit les champs produits par des charges et courants de signes opposés à ceux de la solution de départ. (Elle s'appelle, pour cette raison, "conjugaison de la charge".)

Mais cette même transformation permet de comprendre que les sources connues des équations de Maxwell ne sont pas les seules possibles : On peut décrire, de manière cohérente avec l'invariance de Lorentz et l'invariance de jauge des sources ponctuelles pour le champ magnétique ; elles correspondent à prendre une valeur ξ pour l'angle η, différente de 0 et de π. Cet angle ξ est un paramètre "caché" de l'électromagnétisme, alors on peut se poser la question du mécanisme physique qui impliquerait que dans notre monde $\xi = 0$.

Et il est le *seul* paramètre "caché". Par conséquent les sources magnétiques (et électriques) ne peuvent pas être arbitraires : elles sont reliées par $\rho(\xi) = \rho\cos\xi$ et $\varrho(\xi) = \rho\sin\xi$ et de même pour les courants.

Ce qui est moins évident, à ce stade, est comment écrire un Lagrangien, à partir duquel les équations, qui comprennent les sources aussi bien électriques et magnétiques, peuvent être identifiées comme les équations d'Euler-Lagrange correspondantes.

On se rend compte que l'électrodynamique classique contient beaucoup de sujets qui méritent d'être clarifiés !

2 Sur la famille de la jauge de Lorenz

Une façon de se rendre compte de la nécessité d'imposer une condition de jauge est de remarquer que l'équation

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \Leftrightarrow \eta^{\mu\nu}\Box A_\mu - \partial^\nu\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma = J^\nu \tag{7}$$

ne possède pas de solution unique.

Ce qui est intéressant est que l'on peut remplacer cette équation par l'équation

$$\eta^{\mu\nu}\Box A_\mu - (1+\alpha)\partial^\nu\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma = J^\nu \tag{8}$$

qui possède une solution unique, pourvu que $\alpha \neq 0$.

Le choix du paramètre α s'appelle un choix de jauge : $\alpha = -1$ correspond à la jauge de Lorenz.

Le sujet de cet exercice est de montrer que, si la solution $A_\nu(x)$, de cette équation dépend de la valeur du paramètre α, $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ n'en dépend pas.

Comme l'équation est linéaire, il est commode de travailler en espace de Fourier :

$$\begin{array}{ll} A_\mu(x) = \displaystyle\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-\mathrm{i}kx}\, \widehat{A}_\mu(k) & J_\mu(x) = \displaystyle\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-\mathrm{i}kx}\, \widehat{J}_\mu(k) \\ \widehat{A}_\mu(k) = \displaystyle\int d^4x\, e^{\mathrm{i}kx}\, A_\mu(x) & \widehat{J}_\mu(k) = \displaystyle\int d^4x\, e^{\mathrm{i}kx}\, J_\mu(x) \end{array}$$

1. *Montrer qu'en termes des transformées, $\widehat{A}_\mu(k)$ et $\widehat{J}(k)$ l'équation (8) devient :*

$$\begin{array}{l} -k^2\eta^{\mu\nu}\widehat{A}_\mu + (1+\alpha)k^\nu k^\mu \widehat{A}_\mu = \widehat{J}^\nu(k) \Leftrightarrow \left(\eta^{\mu\nu} - (1+\alpha)\dfrac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)\widehat{A}_\nu = -\dfrac{\widehat{J}^\mu}{k^2} \Leftrightarrow \\ M^{\mu\nu}(\alpha)\widehat{A}_\nu(k) = -\dfrac{\widehat{J}^\mu(k)}{k^2} \end{array} \tag{9}$$

Réponse : On remplace dans l'équation du mouvement :

$$\begin{array}{l} \Box A_\mu(x) = \eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma A_\mu(x) \\ \partial_\sigma A_\mu(x) = \partial_\sigma \displaystyle\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-\mathrm{i}kx}\, \widehat{A}_\mu(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-\mathrm{i}kx}\, \left(-\mathrm{i}k_\sigma \widehat{A}_\mu(k)\right) \Leftrightarrow \\ \partial_\rho\partial_\sigma A_\mu(x) = \displaystyle\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-\mathrm{i}kx}\, \left(-k_\rho k_\sigma \widehat{A}_\mu(k)\right) \Leftrightarrow \Box A_\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-\mathrm{i}kx}\, \left(-k^2\widehat{A}_\mu(k)\right) \end{array}$$

Par conséquent, l'éq. (8) devient

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-\mathrm{i}kx}\, \left\{-\eta^{\mu\nu}k^2\widehat{A}_\mu(k) + (1+\alpha)k^\nu\eta^{\rho\sigma}k_\sigma\widehat{A}_\rho(k)\right\} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-\mathrm{i}kx}\, \widehat{J}^\nu(k) \tag{10}$$

Maintenant l'on note que l'indice μ dans le premier terme et les indices ρ et σ dans le deuxième terme sont muets. On peut, aussi, écrire

$$\eta^{\rho\sigma}k_\sigma\widehat{A}_\rho(k) = k^\rho\widehat{A}_\rho(k) = k^\mu\widehat{A}_\mu(k)$$

Ainsi, l'éq. (10) devient

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-\mathrm{i}kx} \left[\left\{-\eta^{\mu\nu}k^2 + (1+\alpha)k^\nu k^\mu\right\}\widehat{A}_\mu(k) - \widehat{J}^\nu(k)\right] = 0 \tag{11}$$

Cette expression ne décrit rien d'autre qu'un système linéaire d'un nombre infini d'équations, étiquetées par la variable k. La "matrice" a comme éléments $e^{-\mathrm{i}kx}/(2\pi)^4$ et elle est inversible– son inverse a comme éléments $e^{\mathrm{i}kx}$.

Par conséquent, la seule solution à ce système linéaire est

$$\left\{-\eta^{\mu\nu}k^2 + (1+\alpha)k^\nu k^\mu\right\}\widehat{A}_\mu(k) - \widehat{J}^\nu(k) = 0 \Leftrightarrow \left(\eta^{\mu\nu} - (1+\alpha)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)\widehat{A}_\mu(k) = -\frac{\widehat{J}^\nu(k)}{k^2} \Leftrightarrow$$
$$M^{\nu\mu}(\alpha)\widehat{A}_\mu(k) = -\frac{\widehat{J}^\nu(k)}{k^2} \Leftrightarrow M^{\mu\nu}(\alpha)\widehat{A}_\nu(k) = -\frac{\widehat{J}^\mu(k)}{k^2}$$

2. *Montrer que, pour $\alpha = 0$, la matrice 4×4,*

$$M^{\mu\nu}(\alpha) = \eta^{\mu\nu} - (1+\alpha)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \tag{12}$$

satisfait la relation

$$M^{\mu\nu}(0)\eta_{\nu\rho}M^{\rho\sigma}(0) = M^{\mu\sigma}(0) \tag{13}$$

c.à.d. c'est un projecteur.

Par contre, que, pour $\alpha \neq 0$, cette relation n'est pas satisfaite.

Réponse : La démonstration est par calcul direct :

$$M^{\mu\nu}(\alpha)\eta_{\nu\rho} = \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} - (1+\alpha)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\eta_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho - (1+\alpha)\frac{k^\mu k_\rho}{k^2}$$
$$M^{\mu\nu}(\alpha)\eta_{\nu\rho}M^{\rho\sigma}(\alpha) = \left(\delta^\mu_\rho - (1+\alpha)\frac{k^\mu k_\rho}{k^2}\right)\left(\eta^{\rho\sigma} - (1+\alpha)\frac{k^\rho k^\sigma}{k^2}\right) =$$
$$\eta^{\mu\sigma} - 2(1+\alpha)\frac{k^\mu k^\sigma}{k^2} + (1+\alpha)^2\frac{k^\mu k_\rho k^\rho k^\sigma}{(k^2)^2} = \eta^{\mu\sigma} - 2(1+\alpha)\frac{k^\mu k^\sigma}{k^2} + (1+\alpha)^2\frac{k^\mu k^\sigma}{k^2}$$

puisque $k_\rho k^\rho = k^2$.

On remarque que, si $\alpha = 0$, alors la dernière ligne devient

$$\eta^{\mu\sigma} - \frac{k^\mu k^\sigma}{k^2} = M^{\mu\sigma}(0)$$

3. *En particulier montrer que l'action de $M^{\mu\nu}(0)$ sur tout vecteur v_μ, parallel à k_μ, c.à.d. $v_\mu = ak_\mu$, avec a une constante, donne le résultat*

$$M^{\mu\nu}(0)v_\nu = 0$$

(ce qui est une manière de comprendre que la matrice $M^{\mu\nu}(0)$ est singulière-elle possède une valeur propre 0, avec vecteur propre $v_\mu = k_\mu/k^2$–ce qui exprime la propriété que l'éq. (7) ne possède pas de solution unique, puisque, si $\widehat{A}_\mu(k)$ est solution, $\widehat{A}_\mu(k)+f(k^2)k_\mu$ l'est, également, quelle que soit la fonction $f(k^2)$; par contre l'éq. (8) oui, puisque $M^{\mu\nu}(\alpha)$ est inversible.)
Réponse : Encore une fois, par calcul direct :

$$M^{\mu\nu}(0)k_\nu = \eta^{\mu\nu}k_\nu - \frac{k^\mu k^\nu k_\nu}{k^2} = 0$$

puisque $k^\nu k_\nu = k^2$.

4. *Montrer que l'inverse, $N^{\mu\nu}(\alpha)$, de la matrice $M^{\mu\nu}(\alpha)$ est donnée par l'expression*

$$N^{\mu\nu}(\alpha) = c_1\eta^{\mu\nu} + c_2\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}$$

en déterminant les constantes c_1 et c_2 pour que

$$M^{\mu\nu}N_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$$

Exprimer le membre de gauche de cette équation comme

$$f(c_1,c_2)\delta^\mu_\rho + g(c_1,c_2)\frac{k_\rho k^\mu}{k^2}$$

déduire que

$$\begin{array}{c} f(c_1,c_2) = 1 \\ g(c_1,c_2) = 0 \end{array}$$

et trouver ainsi les valeurs des constantes c_1 et c_2.
Ecrire l'expression concrète pour

$$\widehat{A}^\mu(k) = -N^{\mu\nu}(\alpha)\frac{\widehat{J}_\nu(k)}{k^2}$$

Réponse : On calcule $M^{\mu\nu}N_{\nu\rho}$:

$$\begin{array}{l} M^{\mu\nu}N_{\nu\rho} = \left(\eta^{\mu\nu} - (1+\alpha)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)\left(c_1\eta_{\nu\rho} + c_2\frac{k_\nu k_\rho}{k^2}\right) = \\ c_1\delta^\mu_\rho + c_2\frac{k_\rho k^\mu}{k^2} - c_1(1+\alpha)\frac{k_\rho k^\mu}{k^2} - c_2(1+\alpha)\frac{k^\mu k^\nu k_\nu k^\rho}{(k^2)^2} = \delta^\mu_\rho \Leftrightarrow \\ c_1\delta^\mu_\rho + \left(c_2 - c_1(1+\alpha) - c_2(1+\alpha)\right)\frac{k_\rho k^\mu}{k^2} = \delta^\mu_\rho \end{array}$$

et l'on identifie

$$\begin{array}{l} f(c_1,c_2) \equiv c_1 = 1 \\ g(c_1,c_2) = c_2 - c_1(1+\alpha) - c_2(1+\alpha) = -c_1(1+\alpha) - c_2\alpha = 0 \Leftrightarrow c_2 = -\dfrac{1+\alpha}{\alpha} \end{array}$$

Par conséquent

$$\widehat{A}^\mu(k) = -\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{1+\alpha}{\alpha}\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)\frac{\widehat{J}_\nu(k)}{k^2} = -\frac{\widehat{J}^\mu(k)}{k^2} + \frac{1+\alpha}{\alpha}\frac{k^\mu k^\nu \widehat{J}_\nu(k)}{k^2}$$

5. *Vérifier que la transformée de Fourier, $\widehat{F}_{\mu\nu}(k)$ de $F_{\mu\nu}(x)$, donnée par l'expression*

$$\widehat{F}_{\mu\nu}(k) = -\mathrm{i}\left(k_\mu \widehat{A}_\nu(k) - k_\nu \widehat{A}_\mu(k)\right) \tag{14}$$

est indépendante du paramètre α.

Réponse : Par calcul direct

$$k_\mu \widehat{A}_\nu(k) = -\frac{k_\mu \widehat{J}_\nu(k)}{k^2} + \frac{1+\alpha}{\alpha}\frac{k_\mu k_\nu k_\rho \widehat{J}^\rho(k)}{k^2}$$

Maintenant on constate que le terme, qui dépend de α, est symétrique sous l'échange $\mu \leftrightarrow \nu$ (l'indice ρ est muet), tandis que $\widehat{F}_{\mu\nu}(k)$ est antisymétrique. Par conséquent les contributions

$$\frac{1+\alpha}{\alpha}\frac{k_\mu k_\nu k_\rho \widehat{J}^\rho(k)}{k^2} - \frac{1+\alpha}{\alpha}\frac{k_\nu k_\mu k_\rho \widehat{J}^\rho(k)}{k^2} = 0$$

et

$$\widehat{F}_{\mu\nu}(k) = -\mathrm{i}\left(k_\mu \widehat{A}_\nu(k) - k_\nu \widehat{A}_\mu(k)\right) = -\mathrm{i}\frac{k_\mu \widehat{J}_\nu(k) - k_\nu \widehat{J}_\mu(k)}{k^2}$$

est, en effet, indépendant de la valeur du paramètre α, qui a été introduit pour assurer l'unicité de la solution pour l'équation du mouvement.