Examen final : Devoir à la maison
Electrodynamique classique

Date limite : 18 mai 2020

Stam Nicolis [1]

CNRS–Institut Denis Poisson (UMR7013)
Université de Tours, Université d'Orléans
Parc Grandmont, 37200 Tours, France

Choisir **un** sujet.

1. E-Mail : Stam.Nicolis@lmpt.univ-tours.fr

1 Des symétries "cachées" des équations de Maxwell

1. Montrer que les équations de Maxwell, en absence de sources,
$$\begin{array}{rclcrcl} \mathrm{div}\,\mathbf{E} & = & 0 & \quad & \mathrm{rot}\,\mathbf{E} & = & -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\mathbf{B} & = & 0 & \quad & \mathrm{rot}\,\mathbf{B} & = & \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \tag{1}$$
peuvent être écrites comme deux équations
$$\mathrm{div}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) \tag{2}$$
2. Montrer que, si $\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}$, est une solution de ces équations, alors
$$\mathbf{E}(\eta)+\mathrm{i}\mathbf{B}(\eta) \equiv e^{\mathrm{i}\eta}(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) \tag{3}$$
est une famille de solutions, quelle que soit la valeur de $\eta \in [0, 2\pi)$.
L'intérêt de ces transformations est qu'elles mélangent le champ électrique et le champ magnétique et mettent en évidence qu'en absence de sources, ce que l'on appelle champ électrique et champ magnétique est un choix de coordonnées dans l'espace des champs.
3. Si l'on introduit les sources "connues", ρ et $\mathbf{J}$ dans les équations de Maxwell, montrer que les équations (2) prennent la façon suivante :
$$\mathrm{div}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) = \rho \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) + \mathrm{i}\mathbf{J} \tag{4}$$
Maintenant on réalise les transformations (3) dans ces équations.
Montrer que, si les sources se transforment, également, comme :
$$\begin{array}{l} \rho(\eta)+\mathrm{i}\varrho(\eta) = e^{\mathrm{i}\eta}\rho \\ \mathbf{J}(\eta)+\mathrm{i}\mathcal{J}(\eta) = e^{\mathrm{i}\eta}\mathbf{J} \end{array} \tag{5}$$
alors les équations restent invariantes. Quelle est l'interprétation des nouvelles sources ϱ et $\mathcal{J}$? Ecrire les expressions de $\rho(\eta)$, $\varrho(\eta)$, $\mathbf{J}(\eta)$ et $\mathcal{J}(\eta)$.
Peut-on trouver une valeur réelle particulière du paramètre η, telle que $\varrho(\eta) = 0$ *et* $\mathcal{J}(\eta) = \mathbf{0}$? (Ce qui est cohérent avec ce que l'on sait jusqu'à maintenant.) Cette valeur est-elle unique ?
En conclusion, la liberté de modifier les champs électrique et magnétique, selon les transformations (3) est-elle compatible avec l'existence seulement de charges électriques et courants électriques ? La loi de conservation de la charge électrique reste-elle valable ?
4. On sait que les transformations de Lorentz mélangent les champs électrique et magnétique et que les quantités invariantes sous transformations de Lorentz sont les combinaisons
$$I_1 = -2(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) \quad \text{et} \quad I_2 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \tag{6}$$
Comment ces quantités dépendent-elles du paramètre η, lorsque l'on calcule les I_1 et I_2, pour les champs $\mathbf{E}(\eta)$ et $\mathbf{B}(\eta)$? Y a-t-il des valeurs pour η, pour lesquelles I_1 et I_2 sont indépendantes de η ? Pourquoi ces valeurs seraient-elles "spéciales" ?

2 Sur la famille de la jauge de Lorenz

Une façon de se rendre compte de la nécessité d'imposer une condition de jauge est de remarquer que l'équation

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \Leftrightarrow \eta^{\mu\nu}\Box A_\mu - \partial^\nu \eta^{\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma = J^\nu \tag{7}$$

ne possède pas de solution unique.

Ce qui est intéressant est que l'on peut remplacer cette équation par l'équation

$$\eta^{\mu\nu}\Box A_\mu - (1+\alpha)\partial^\nu \eta^{\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma = J^\nu \tag{8}$$

qui possède une solution unique, pourvu que $\alpha \neq 0$.

Le choix du paramètre α s'appelle un choix de jauge : $\alpha = -1$ correspond à la jauge de Lorenz.

Le sujet de cet exercice est de montrer que, si la solution $A_\nu(x)$, de cette équation dépend de la valeur du paramètre α, $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ n'en dépend pas.

Comme l'équation est linéaire, il est commode de travailler en espace de Fourier :

$$\begin{array}{ll} A_\mu(x) = \displaystyle\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-\mathrm{i}kx}\, \widehat{A}_\mu(k) & J_\mu(x) = \displaystyle\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-\mathrm{i}kx}\, \widehat{J}_\mu(k) \\ \widehat{A}_\mu(k) = \displaystyle\int d^4x\, e^{\mathrm{i}kx}\, A_\mu(x) & \widehat{J}_\mu(k) = \displaystyle\int d^4x\, e^{\mathrm{i}kx}\, J_\mu(x) \end{array}$$

1. Montrer qu'en termes des transformées, $\widehat{A}_\mu(k)$ et $\widehat{J}(k)$ l'équation (8) devient :

$$\begin{array}{l} -k^2\eta^{\mu\nu}\widehat{A}_\mu + (1+\alpha)k^\nu k^\mu \widehat{A}_\mu = \widehat{J}^\nu(k) \Leftrightarrow \left(\eta^{\mu\nu} - (1+\alpha)\dfrac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)\widehat{A}_\nu = -\dfrac{\widehat{J}^\mu}{k^2} \Leftrightarrow \\ M^{\mu\nu}(\alpha)\widehat{A}_\nu(k) = -\dfrac{\widehat{J}^\mu(k)}{k^2} \end{array} \tag{9}$$

2. Montrer que, pour $\alpha = 0$, la matrice 4×4,

$$M^{\mu\nu}(\alpha) = \eta^{\mu\nu} - (1+\alpha)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \tag{10}$$

satisfait la relation

$$M^{\mu\nu}(0)\eta_{\nu\rho}M^{\rho\sigma}(0) = M^{\mu\sigma}(0) \tag{11}$$

c.à.d. c'est un projecteur.

Par contre, que, pour $\alpha \neq 0$, cette relation n'est pas satisfaite.

3. En particulier montrer que l'action de $M^{\mu\nu}(0)$ sur tout vecteur v_μ, parallel à k_μ, c.à.d. $v_\mu = ak_\mu$, avec a une constante, donne le résultat

$$M^{\mu\nu}(0)v_\nu = 0$$

(ce qui est une manière de comprendre que la matrice $M^{\mu\nu}(0)$ est singulière-elle possède une valeur propre 0, avec vecteur propre $v_\mu = k_\mu/k^2$–ce qui exprime la propriété que l'éq. (7) ne possède pas de solution unique, puisque, si $\widehat{A}_\mu(k)$ est solution, $\widehat{A}_\mu(k)+f(k^2)k_\mu$ l'est, également, quelle que soit la fonction $f(k^2)$; par contre l'éq. (8) oui, puisque $M^{\mu\nu}(\alpha)$ est inversible.)

4. Montrer que l'inverse, $N^{\mu\nu}(\alpha)$, de la matrice $M^{\mu\nu}(\alpha)$ est donnée par l'expression

$$N^{\mu\nu}(\alpha) = c_1\eta^{\mu\nu} + c_2\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}$$

en déterminant les constantes c_1 et c_2 pour que

$$M^{\mu\nu}N_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$$

Exprimer le membre de gauche de cette équation comme

$$f(c_1,c_2)\delta^\mu_\rho + g(c_1,c_2)\frac{k_\rho k^\mu}{k^2}$$

déduire que

$$\begin{aligned} f(c_1,c_2) &= 1 \\ g(c_1,c_2) &= 0 \end{aligned}$$

et trouver ainsi les valeurs des constantes c_1 et c_2.
Ecrire l'expression concrète pour

$$\widehat{A}^\mu(k) = -N^{\mu\nu}(\alpha)\frac{\widehat{J}_\nu(k)}{k^2}$$

5. Vérifier que la transformée de Fourier, $\widehat{F}_{\mu\nu}(k)$ de $F_{\mu\nu}(x)$, donnée par l'expression

$$\widehat{F}_{\mu\nu}(k) = -\mathrm{i}\left(k_\mu\widehat{A}_\nu(k) - k_\nu\widehat{A}_\mu(k)\right) \tag{12}$$

est indépendante du paramètre α.