Les transformations de Möbius

Stam Nicolis

Institut Denis Poisson
Université de Tours, Université d'Orléans, CNRS

Tours, le 21 novembre 2018

Plan

Les transformations de Möbius

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

Les transformations de Möbius

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}$$

On peut se restreindre au cas où $ad - bc = 1$ et une solution de cette relation est donnée lorsque $a = \cos\theta_n, b = -\sin\theta_n, c = \sin\theta_n$ et $d = \cos\theta_n$. On peut prendre $\theta_n = \theta$ pour tout n :

$$z' = \frac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta}$$

Quelques résultats mathématiques

Théorème (Résolution)

La suite $\{z_n\}$, pour le cas des éléments trigonométriques, est donnée par l'expression

$$z_n = \frac{z_0 \cos n\theta + \sin n\theta}{-z_0 \sin n\theta + \cos n\theta}$$

Quelques résultats mathématiques

Théorème (Résolution)

La suite $\{z_n\}$, pour le cas des éléments trigonométriques, est donnée par l'expression

$$z_n = \frac{z_0 \cos n\theta + \sin n\theta}{-z_0 \sin n\theta + \cos n\theta}$$

Corollaire

La suite $\{z_n\}$, est périodique, si $\theta = 2\pi l/k$, avec période $T = k$.

Démonstration

Démonstration.

La démonstration suit par récurrence :

- On montre que c'est vrai, pour $n = 0$.

Démonstration

Démonstration.

La démonstration suit par récurrence :

- On montre que c'est vrai, pour $n = 0$.
- On montre que, si c'est vrai, pour $n = k$, alors c'est vrai pour $n = k + 1$.

$\square$

Itérer Möbius

On peut générer une suite $\{z_n\}$ en appliquant la transformation de Möbius de façon itérée :

$$z_{n+1} = \frac{az_n + b}{cz_n + d}$$

à partir d'un point de départ, z_0.

Mélanger les Möbius

On peut, aussi, “mélanger” les transformations à fonctions trigonométriques

$$z' = \frac{\cos\theta_n z - \sin\theta_n}{z\sin\theta_n + \cosh\theta_n}$$

Le cas le plus simple est celui où

$$\theta_n = \begin{cases} \theta_1 & n \,\mathrm{pair} \\ \theta_0 & n \,\mathrm{impair} \end{cases}$$

Conclusions

- Les transformations de Möbius réalisent une correspondance entre un nombre complexe z_n et un autre nombre complexe z_{n+1}.
  Si les coefficients de la transformation peuvent être exprimés en termes de fonctions trigonométriques, la correspondance "hérite" les propriétés de périodicité de celles-ci : Si $\theta = 2\pi/k$, alors, $k\theta = 2\pi$ et $z_k = z_0$, par conséquent, la période est $T = k$.

Conclusions

- Les transformations de Möbius réalisent une correspondance entre un nombre complexe z_n et un autre nombre complexe z_{n+1}.
  Si les coefficients de la transformation peuvent être exprimés en termes de fonctions trigonométriques, la correspondance "hérite" les propriétés de périodicité de celles-ci : Si $\theta = 2\pi/k$, alors, $k\theta = 2\pi$ et $z_k = z_0$, par conséquent, la période est $T = k$.
- Si θ_n prend deux valeurs, de façon alternée, avec des fractions de 2π, alors ce qui est remarquable est que la suite possède *deux périodes*, une paire, $T_{\text{paire}} = 2k_0k_1$ et une, impaire, $2k_0n' + 1$, où n' est l'entier positif le plus petit qui satisfait

$$1 = mk_1 - n'(k_0 + k_1)$$

  avec m entier.