Les transformations de Möbius

Stam Nicolis

Institut Denis Poisson
Université de Tours, Université d'Orléans, CNRS

Tours, le 21 novembre 2018

Plan

Les transformations de Möbius

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

Les transformations de Möbius

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

- Les transformations à fonctions trigonométriques

Les transformations de Möbius

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

- Les transformations à fonctions trigonométriques
- Les transformations à fonctions hyperboliques

Les différentes classes de transformations

$$z' = \frac{\cos\theta z + \sin\theta}{-\sin\theta z + \cos\theta}$$

Les différentes classes de transformations

$$z' = \frac{\cos\theta z + \sin\theta}{-\sin\theta z + \cos\theta}$$

$$z' = \frac{\cosh\phi z + \sinh\phi}{-\sinh\phi z + \cosh\phi}$$

Quelques résultats mathématiques

Théorème (Résolution)

La suite $\{z_n\}$, pour le cas des éléments trigonométriques, est donnée par l'expression

$$z_n = \frac{z_0 \cos n\theta + \sin n\theta}{-z_0 \sin n\theta + \cos n\theta}$$

Quelques résultats mathématiques

Théorème (Résolution)

La suite $\{z_n\}$, pour le cas des éléments trigonométriques, est donnée par l'expression

$$z_n = \frac{z_0 \cos n\theta + \sin n\theta}{-z_0 \sin n\theta + \cos n\theta}$$

Corollaire

La suite $\{z_n\}$, pour le cas des éléments hyperboliques, est donnée par l'expression

$$z_n = \frac{z_0 \cosh n\phi + \sin n\phi}{z_0 \sinh n\phi + \cosh n\phi}$$

Démonstration

Démonstration.

La démonstration suit par récurrence :

- Montrer que c'est vrai, pour $n = 0$.

Démonstration

Démonstration.

La démonstration suit par récurrence :

- Montrer que c'est vrai, pour $n = 0$.
- Montrer que ; si c'est vrai, pour $n = k$, alors c'est vrai pour $n = k + 1$.

$\square$

C'est quoi les transformations de Môbius ?

Les transformations de Möbius renvoient un nombre complexe z à un autre nombre complexe z' :

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

où a, b, c, d peuvent, aussi, être des nombres complexes. Une condition qu'ils doivent satisfaire est

$$ad - bc = 1$$

La projection stéréographique

On peut associer à un point $z = x + \mathrm{i}y$ du plan complexe un point d'une surface, par exemple, celle de la sphère à rayon 1 :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

projeté à partir du point $(0, 0, 1)$ sur le plan $Z = 0$:

$$(0, 0, 1) + t((X, Y, Z) - (0, 0, 1)) = (tX, tY, t(Z - 1) + 1)$$
$$t(Z - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{1-Z} \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{X}{1-Z}, y = \frac{Y}{1-Z}$$

La transformation inverse

A partir du point $x(,y)$ du plan complexe, on peut retrouver le point (X,Y,Z) de la surface $S(X,Y,Z)=0$. Pour la sphère on a

$$X = x(1-Z)$$
$$Y = y(1-Z)$$
$$S(X,Y,Z)=0 \Leftrightarrow x^2(1-Z)^2 + y^2(1-Z)^2 + Z^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$(x^2+y^2)(1-Z)^2 = 1 - Z^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2 = \frac{(1-Z^2)}{1-Z^2} = \frac{1+Z}{1-Z} \Leftrightarrow Z = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

et l'on retrouve, ainsi

$$X = \frac{2x}{x^2+y^2+1} \quad Y = \frac{2y}{x^2+y^2+1} \quad Z = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

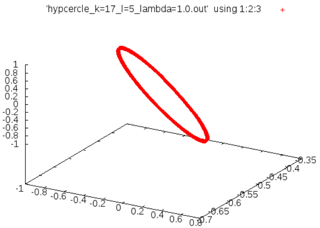
Itérer Möbius

On peut générer une suite $\{z_n\}$ en appliquant la transformation de Möbius de façon itérée :

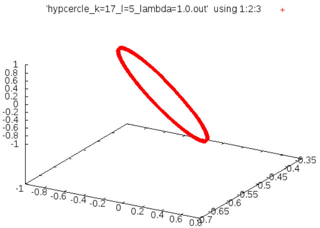
$$z_{n+1} = \frac{az_n + b}{cz_n + d}$$

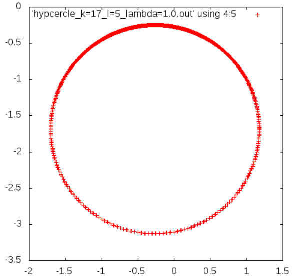
à partir d'un point de départ, z_0.

Le chaos chez Möbius



Le chaos chez Möbius





Mélanger les Möbius

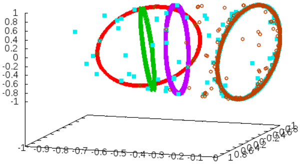
On cherche à “mélanger” les transformations de Möbius, selon la valeur d’un paramètre, u :

Mélanger les Möbius

On cherche à “mélanger” les transformations de Möbius, selon la valeur d’un paramètre, u :

$$u_{n+1} = \lambda u_n(1 - u_n)$$

avec $1 \leq \lambda \geq 4$.



Conclusions

- Les transformations de Möbius réalisent une correspndance entre un nombre complexe z_n et un autre nombre complexe z_{n+1}.
  Si les coefficients de la transformation peuvent être exprimés en termes de focntions trigonométriques, la correspondance "hérite" les propriétés de périodicité de celles-ci : Si $\theta = 2\pi/k$, alors, $k\theta = 2\pi$ et $z_k = z_0$.

Conclusions

- Les transformations de Möbius réalisent une correspndance entre un nombre complexe z_n et un autre nombre complexe z_{n+1}.
  Si les coefficients de la transformation peuvent être exprimés en termes de focntions trigonométriques, la correspondance “hérite” les propriétés de périodicité de celles-ci : Si $\theta = 2\pi/k$, alors, $k\theta = 2\pi$ et $z_k = z_0$.

- Théorème
  Les éléments de la suite $\{z_n\}$ *appartiennent à un cercle.*

Conclusions

- Théorème

  Pour le cas des transformations

  $$z_n = \frac{\cosh(n\phi) z_0 + \sinh(n\phi)}{z_0 \sinh(n\phi) + \cosh(n\phi)}$$

  la suite $\{z_n\}$ *appartient à une hyperbole.*

Conclusions

- Par l'application stéréographique

$$X = \frac{2x}{x^2+y^2+1} \quad Y = \frac{2y}{x^2+y^2+1} \quad Z = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

on peut faire correspondre un point du plan complexe (x, y)à un point de la sphère $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. On peut, en fait, réaliser cette correspondance pour n'importe quelle surface, par exemple, l'hyperboloïde à une nappe, $X^2 + Z^2 - Y^2 = 1$. Les expressions pour $X(x, y), Y(x, y), Z(x, y)$ sont sensibles à la surface choisie.