Université de Tours "François Rabelais"
Faculté de Sciences et Techniques
Licence de Physique 2006–2007
Simulation, Modélisation, Outils Informatiques

Exercices de Révision

1. Equations Elliptiques
   – Soit la fonctionnelle
   $$S = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\beta}{4} \left(\Phi(x)^2 - 1 \right)^2 \right]$$
   Par une intégration par parties écrire cette expression sous la forme
   $$S = \int dx \left[\frac{1}{2} \Phi(x) \mathsf{M} \Phi(x) + V(\Phi(x)) \right]$$
   avec M un opérateur à expliciter et déduire l'équation d'extrémisation, $\delta S = 0$ sou la forme
   $$\mathsf{M}\Phi + V'(\Phi) = 0$$
   Discuter les différentes formes obtenues, selon que l'on discrétise S d'abord, où que l'on discrétise cette équation.
2. Equations Paraboliques
   – Soit l'équation de Schrödinger
   $$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$
   On éxprime $\Phi(z, t)$ en termes des fonctions propres et l'on obtient l'équation
   $$E\psi_E(z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''_E(z)$$
   On travaille désormais dans des unités telles que $\hbar = 1$ et $m = 1/2$. La discrétisation conventionnelle conduit à la récurrence
   $$\psi_{E,n+1} + \psi_{E,n-1} = (2 - E)\psi_{E,n}$$
   pour $n = 0, 1, \ldots, N$, si l'on travaille sur un intervalle de taille $L = N \times a$. On cherche à résoudre cette équation, en imposant les conditions aux bords, $\psi_{E,0} = 0$ et $\psi_{E,N} = 0$. Dans ce cas, on a, bien sûr, un problème de valeurs propres (les valeurs possibles de E, pour lesquelles on a une solution non-nulle). Au lieu de diagonaliser la matrice résultante $(N - 2) \times (N - 2)$, on va employer l'astuce suivante : on va écrire la récurrence sous la forme
   $$\begin{pmatrix} \psi_{E,n+1} \\ \psi_{E,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{E,n} \\ \psi_{E,n-1} \end{pmatrix}$$
   On note que, dans ce cas, les éléments de la matrice 2×2 ne dépendent pas de la position et l'on peut résoudre cette récurrence, imposer les conditions aux bords et arriver à l'équation suivante
   $$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N = 1$$
   En déduire les valeurs possibles pour E et les comparer avec la solution exacte.
   –
3. Equations Hyperboliques
   – Soit l'équation
   $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - m^2 \Phi$$
   On veut la résoudre numériquement par la méthode Runge-Kutta d'ordre 4. En introduisant la vitesse, $\Psi = \partial \Phi / \partial t$ on peut la transformeer en un système de deux équations du premier ordre couplées. Si l'on appelle le pas temporel a_t, $t = p \times a_t$ et le pas spatial a_z, $z = q \times a_z$, trouver la relation entre a_z et a_t pour que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 soit stable.
   Discuter l'influence du terme proportionnel à m^2 dans la relation entre les pas.