

**TD2 : Techniques d'Approximation : La Théorie des Perturbations//**  
**C O R R I G É**

Le but de cet exercice est l'étude quantitative du mouvement de deux masses,  $m_1$  et  $m_2$ , lorsque l'énergie potentielle d'interaction est une fonction uniquement de leur séparation,  $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|) = V(r)$ . Dans ce cas on sait que le mouvement "intéressant" est celui d'une particule fictive, de masse égale à la "masse réduite",  $m \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ , dans un potentiel "effectif",

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

où  $L^2 \equiv \|\mathbf{L}\|^2$  est la norme du moment cinétique,  $\mathbf{L} = m_1 \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{v}_2$ . Pour le cas Newtonien ou Coulombien (avec charges de signes différentes), on sait que le potentiel effectif possède un minimum,  $V^* \equiv V_{\text{eff}}(r^*)$ . Pour  $V^* < E < 0$  le mouvement sera donc périodique, avec période

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{du}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(u)}}$$

1. Si l'on ajoute une corde entre les deux masses, on ajoute un terme  $V_{\text{corde}} = \sigma r$  à l'énergie potentielle effective, où  $\sigma$  est la tension de la corde. Alors on ne peut pas faire l'intégrale analytiquement. Dans un premier temps, on cherche à calculer la nouvelle position d'équilibre,  $r^*$ , dans l'approximation où  $L$  est très petit.

Ecrire l'équation  $V'_{\text{eff}}(r) = 0$  comme un polynôme en  $r$ ,

$$c_3 r^3 - c_1 r - 2c_2 = 0$$

avec  $c_3 = \sigma$ ,  $c_2 = L^2/(2m)$  et  $c_1 = -Gm_1 m_2$  dans le cas Newtonien et  $c_1 = Q_1 Q_2 / (4\pi\epsilon_0)$  dans le cas Coulombien. On cherche à exprimer les racines de cette équation comme des séries dans une variable proportionnelle à  $c_2$ , car on note que, lorsque  $c_2 = 0$  on peut résoudre l'équation analytiquement.

Par analyse dimensionnelle montrer que la variable appropriée pour faire ce développement, est

$$\varepsilon = \frac{2c_2}{c_3 \ell^{*3}}$$

avec

$$\ell^* \equiv \sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}$$

et écrire l'équation sous une forme sans dimensions,  $r \equiv u \ell^*$ ,

$$u^3 + u - \varepsilon = 0 \tag{1}$$

Poser

$$u(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varepsilon^n \tag{2}$$

*Réponse :* Cette question fut traitée lors de l'exercice précédent.

2. Montrer que la relation de récurrence pour les coefficients  $A_n$  est

$$\begin{aligned} A_0^3 + A_0 &= 0 \\ 3A_1 A_0^2 + A_1 - 1 &= 0 \\ A_n &= - \sum_{k=1}^{n-1} A_{n-k} \sum_{l=0}^k A_l A_{k-l} \end{aligned}$$

pour  $n \geq 2$  et écrire un programme pour les calculer et les employer pour calculer  $u(\varepsilon)$  et  $r(\varepsilon)$  comme fonction(s) de  $\varepsilon$  et les tracer.

Discuter comment se fait sentir la présence de la corde en fonction du moment cinétique (vu que  $c_2 = L^2/(2m)$ ).

*Réponse :* Si  $u(\varepsilon)$  est représentée par la série, comme dans l'éq. (2), alors son cube,  $u(\varepsilon)^3$  sera, également, représentée par une série, dont les coefficients, que l'on va noter, provisoirement,  $A_n^{(3)}$ , seront fonctions des coefficients  $A_n$ . On veut établir la relation entre eux.

Notre point de départ sera le produit de deux séries quelconques,

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \Rightarrow R(x) \equiv P(x)Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$$

On va montrer que

$$r_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k} = \sum_{k=0}^n q_k p_{n-k}$$

Le raisonnement est le suivant : Le résultat de la multiplication des deux séries est une série de termes  $p_k x^k q_l x^l = p_k q_l x^{k+l}$  avec une somme sur toutes les valeurs possibles de  $k = 0, 1, 2, \dots$  et  $l = 0, 1, 2, \dots$  :

$$R(x) = \sum_{k,l=0}^{\infty} p_k q_l x^{k+l}$$

On peut, maintenant, troquer  $k$  et  $l$  contre, par exemple,  $k$  et  $n = k+l$ , c.à.d., on ramasse les termes qui contribuent à la même puissance de  $x$  et, par la suite, on somme ces termes.

Par conséquent,

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} p_k q_l x^{k+l} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k}$$

Si l'on retient la paire  $l$  et  $n = k + l$ , alors, on trouve

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} p_k q_l x^{k+l} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{l=0}^n p_{n-l} q_l$$

et l'on peut se rendre compte que les deux expressions sont identiques.

Grâce à ce résultat on peut calculer le produit  $P(x)Q(x)S(x)$  de trois séries comme

$$P(x)Q(x)S(x) = R(x)S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_k x^k \sum_{l=0}^{\infty} s_l x^l = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^n r_k s_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^n s_{n-k} \sum_{l=0}^k p_l q_{k-l}$$

On en déduit que,

$$A_n^{(3)} = \sum_{k=0}^n A_{n-k} \sum_{l=0}^k A_l A_{k-l}$$

L'éq. (1) prend, alors, la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=0}^n A_{n-k} \sum_{l=0}^k A_l A_{k-l} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n - \varepsilon = 0$$

Cette expression doit être une identité en  $\varepsilon$ —ainsi le coefficient de chaque puissance de  $\varepsilon$  doit s'annuler.

Pour  $n = 0$ , on trouve que cette identité est

$$\sum_{k=0}^0 A_{0-k} \sum_{l=0}^k A_l A_{k-l} + A_0 = 0 \Leftrightarrow A_0^3 + A_0 = 0$$

On note que cette équation pour le coefficient  $A_0$  est identique à l'équation  $(u^3 + u - \varepsilon)_{\varepsilon=0} = 0$ . Elle a, bien sûr, trois solutions,  $A_0 = 0, A_0 = \pm i$ . Les racines imaginaires ne peuvent pas être acceptées—elles ne possèdent aucune signification physique, car  $u(\varepsilon)$  est la valeur d'une longueur (en unités de  $\ell^*$ ), elle doit être un nombre réel. La seule valeur acceptable pour ce problème est

$$A_0 = 0$$

Pour  $n = 1$ , il y a un terme supplémentaire

$$\sum_{k=0}^1 A_{1-k} \sum_{l=0}^k A_l A_{k-l} + A_1 - 1 = 0$$

Si l'on développe, on trouve

$$A_1 A_0^2 + A_0(A_0 A_1 + A_1 A_0) + A_1 - 1 = 0$$

A partir de la valeur de  $A_0$  on peut déterminer  $A_1$ . Si l'on y pose la valeur de  $A_0$ , que l'on vient de calculer, on trouve que

$$A_1 = 1$$

Par la suite, il devient clair que le calcul direct devient assez fastidieux. Pour le rendre faisable de façon "automatisée", il faut transformer l'équation pour l'annulation du coefficient de  $\varepsilon^n$  en une récurrence, qui exprime  $A_n$  en termes des coefficients d'ordre inférieur,  $A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_0$ .

$$\sum_{k=0}^n A_{n-k} \sum_{l=0}^k A_l A_{k-l} + A_n = 0 \Leftrightarrow A_n A_0^2 + \sum_{k=1}^{n-1} A_{n-k} \sum_{l=0}^k A_l A_{k-l} + A_0 \sum_{l=0}^n A_l A_{n-l} + A_n = 0$$

Cette récurrence, valable pour  $n > 1$ , en fait se simplifie de manière considérable, si l'on y tient compte du fait que  $A_0 = 0$ . On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_{n-k} \sum_{l=0}^k A_l A_{k-l} + A_n = 0 \Leftrightarrow A_n = - \sum_{k=1}^{n-1} A_{n-k} \sum_{l=0}^k A_l A_{k-l}$$

ce qu'il fallait démontrer. On peut calculer à la main les coefficients  $A_2$  et  $A_3$  :

$$A_2 = - \sum_{k=1}^1 A_{2-k} \sum_{l=0}^k A_l A_{k-l} = -A_1 \sum_{l=0}^1 A_l A_{1-l} = -A_1(A_0 A_1 + A_1 A_0) = 0$$

$$A_3 = - \sum_{k=1}^2 A_{3-k} \sum_{l=0}^k A_l A_{k-l} = -A_2 \sum_{l=0}^1 A_l A_{1-l} - A_1 \sum_{l=0}^2 A_l A_{2-l} = - \sum_{l=0}^2 A_l A_{2-l} = -A_1^2 = -1$$

Par conséquent, on déduit que

$$u(\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$$

Une question intéressante est de déterminer, à partir de quelle valeur de  $\varepsilon$  on doit tenir compte des termes d'ordre supérieur. L'éq. (1) définit de manière *implicite*  $u$  comme fonction de  $\varepsilon$ . Une conséquence immédiate de cette relation est la suivante :

$$u^3 + u - \varepsilon = 0 \Rightarrow 3u^2 u' + u' - 1 = 0 \Leftrightarrow u'(\varepsilon) = \frac{1}{3u^2 + 1} > 0$$

C.à.d. la fonction  $u(\varepsilon)$  est monotone croissante, en particulier,  $u(\varepsilon) > 0 = u(0)$  pour  $\varepsilon > 0$ . Il est facile de se rendre compte que cette conséquence n'est pas toujours valable, si l'on ne retient que les deux premiers termes de la série, car  $\varepsilon - \varepsilon^3$  passe par un maximum à  $\varepsilon = 1/\sqrt{3} \approx 0.866$ . Ce maximum est, alors, une fiction de notre approximation et l'on doit tenir compte de plus de termes, au plus tard à partir de cette valeur.

La question suivante, que l'on doit adresser, est comment est-ce que l'on doit bâtir le programme, qui va faire le calcul—et quels sont les tests que l'on doit mener pour contrôler les résultats ?

Le programme doit comprendre :

- Une fonction qui calculera le tableau des coefficients,  $\mathbf{A}[N]$ , jusqu'à un ordre  $N$ , défini par l'utilisateur, à partir des valeurs  $\mathbf{A}[0] = 0, \mathbf{A}[1] = 1$ .
- Une fonction qui, pour chaque valeur du paramètre,  $\varepsilon$ , calculera la valeur  $u_N(\varepsilon)$ , approximation à  $N$  termes, de la série.

(c) Une boucle sur les valeurs du paramètre  $\varepsilon$ , qui affichera la paire des valeurs  $(\varepsilon, u_N(\varepsilon))$ .

Si le calcul de l'étape (a) est une transcription de l'expression mathématique, le calcul de l'étape (b) en diffère complètement. Il est fondé sur l'idée suivante :

Pour calculer  $A_0 + A_1x + A_2x^2$  on va écrire l'expression sous la forme

$$A_0 + x(A_1 + A_2x)$$

Ainsi l'on évite le calcul de puissances, qui coûte très cher, on commence, en stockant dans une variable temporaire,  $s$ , la valeur du coefficient de l'ordre le plus élevé,

$$s = A[2]$$

Dans la première étape, on remplace cette valeur par la valeur

$$s = s * x + A[2 - 1] = A[2] * x + A[2 - 1]$$

Dans la deuxième étape, on remplace cette valeur par la valeur

$$s = s * x + A[2 - 2] = (A[2] * x + A[2 - 1]) * x + A[2 - 2]$$

et, comme on est arrivé à la valeur 0 pour l'indice du coefficient, on s'arrête. La variable  $s$  contient la valeur du polynôme.

Si l'on emploie le langage C pour réaliser ces calculs, un exemple est le suivant :

---

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define NMAX 100          // ordre maximal

double A[NMAX]; // le tableau des coefficients de la série
                // comme une variable globale, puisque plusieurs
                // fonctions doivent y accéder

void coeffs(int N){// la fonction, qui calcule A[0],A[1],...,A[N],N<NMAX
  int k,l,n; // les indices des deux sommes
  double temp1, temp2; // les sommes partielles

  A[0] = 0.0; A[1] = 1.0; // Initialisation de la récurrence

  for(n=2;n<=N;n++){// la boucle sur les coefficients
    temp1 = 0.0; // la somme sur k
    for(k=1;k<n;k++){
      temp2 = 0.0; // la somme sur l
      for(l=0;l<=k;l++){
temp2 = temp2 + A[l]*A[k-l];
```

```
      }
      temp1 = temp1 + A[n-k]*temp2;
    }
    A[n] = -temp1;
  }
}

double poly(double x, int p){// la fonction qui calcule la somme d'ordre p
  double s; // la somme partielle
  int k;    // l'indice de la somme

  s = A[p]; //on initialise la somme avec le coefficient de l'ordre le plus haut
  for(k=1;k<=p;k++){
    s = s*x + A[p-k];
  }

  return(s);
}

main(){
  double epsilon;
  double epsmin = 0.0; // on commence à epsilon = 0.0;
  double epsmax = 1.0; // on termine le calcul à epsilon = 1.0;
  double deps = 0.01;// le pas est 0.01
  int N;           // l'ordre de la somme (doit être <NMAX)

  scanf("%d", &N); // attend à lire de l'entrée standard la valeur de N

  coeffs(N); // appel à la fonction, qui calcule A[0],A[1],...,A[N]

  for(epsilon = epsmin; epsilon < epsmax; epsilon = epsilon + deps){
    printf("%g\t%g\n", epsilon, poly(epsilon, N));
  }
}
```

---

Si l'on emploie ce programme pour effectuer le calcul de  $u(\varepsilon)$ , on trouve un résultat surprenant, selon le nombre de termes  $N$  que l'on utilise, cf. fig. 1. On peut se rendre compte que, apparemment, jusqu'à à peu près  $\varepsilon = 0.4$ , les sommes sont en accord entre elles et affichent une allure cohérente avec ce dont on s'attend. Mais, au-delà de cette valeur, on constate que les l'allure de la courbe affiche une branche manifestement non-physique et les branches qui affichent un comportement cohérent ne semblent pas converger, au fur et à mesure que l'on augmente le nombre des termes. Ces indications

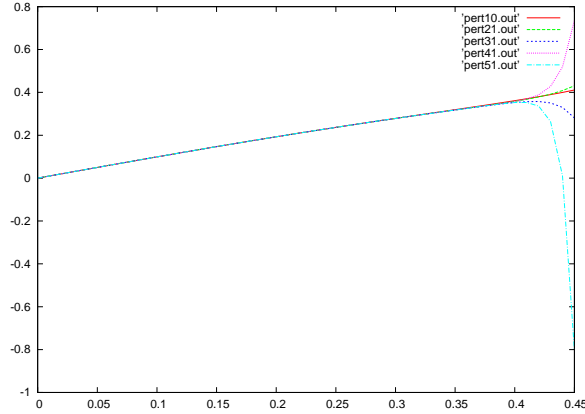


FIG. 1 – Les sommes partielles,  $u_N(\varepsilon)$ , de la série pour  $u(\varepsilon)$ , pour  $N = 10, 21, 31, 41, 51$ .

sont, par contre, cohérentes avec le fait que la série ne converge pas, au-delà de  $\varepsilon \approx 0.4$ . Peut-on raffiner le calcul de cette valeur limite ? Et peut-on comprendre sa signification ? On peut déterminer la valeur critique plus précisément, en divisant l'intervalle des valeurs du paramètre  $\varepsilon$  plus finement, ainsi chaque 0.001, cf. fig. 2. Et l'on peut, même, mettre en évidence la raison "technique", car on peut écrire les racines de l'équation sous forme explicite. Par contre, on ne peut, encore, expliquer la raison *physique* de la divergence, quel est l'effet physique à l'origine du fait que, la position d'équilibre, pour  $\varepsilon < \varepsilon_c = 0.3849\dots$  est une "perturbation" de n'importe quelle valeur plus petite, par contre, pour  $\varepsilon > \varepsilon_c = 0.3849\dots$  il faut effectuer une "continuation analytique" : si  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \delta\varepsilon$ , avec  $\varepsilon > \varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_1, \delta\varepsilon < \varepsilon_c$ , alors on peut écrire

$$u(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \delta\varepsilon^n$$

avec

$$B_0 = u(\varepsilon_1) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varepsilon_1^n$$

De manière similaire à celle exposée pour calculer les coefficients  $A_n$ , on peut calculer les coefficients  $B_n$  et, ainsi, obtenir les valeurs de  $u(\varepsilon)$  dans l'intervalle  $\varepsilon_c < \varepsilon < 2\varepsilon_c$  et continuer ainsi.

Reste à dévoiler la raison "technique". On peut résoudre l'équation

$$u^3 + u - \varepsilon = 0$$

de la manière suivante (découverte par Cardano et Tartaglia au 16ième siècle) : On pose

$$u \equiv X + Y$$

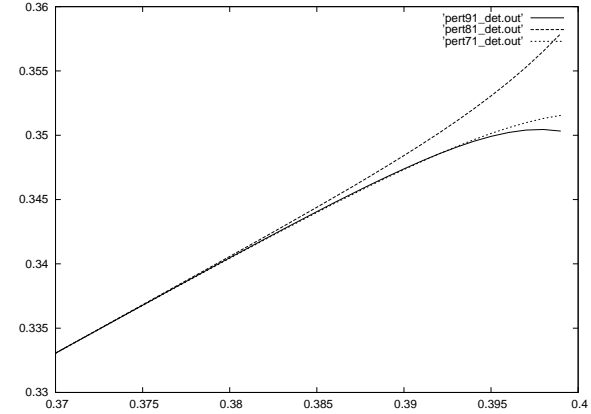


FIG. 2 – Les sommes partielles,  $u_N(\varepsilon)$ , de la série pour  $u(\varepsilon)$ , avec une discrétisation de  $\delta\varepsilon = 0.001$ .

et, pour  $\varepsilon \neq 0$  on sait que  $X + Y \neq 0$ . Si l'on remplace cette expression dans l'équation, on trouve que

$$X^3 + Y^3 - \varepsilon + (3XY + 1)(X + Y) = 0$$

On exploite, maintenant, la liberté, dont on dispose, sur  $X$  et  $Y$ , pour poser

$$X^3 + Y^3 = \varepsilon$$

et

$$3XY + 1 = 0 \Leftrightarrow XY = -\frac{1}{3} \Rightarrow X^3 Y^3 = -\frac{1}{27}$$

Ces relations impliquent que  $X^3$  et  $Y^3$  sont les racines d'une équation de second degré, à savoir

$$t^2 - t\varepsilon - \frac{1}{27} = 0$$

ainsi

$$X^3 = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4}{27}}}{2}$$

et

$$Y^3 = \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4}{27}}}{2}$$

Par conséquent, une racine de l'équation est

$$u = X + Y = \left( \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4}{27}}}{2} \right)^{1/3} + \left( \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4}{27}}}{2} \right)^{1/3}$$

On note que cette racine est réelle, car l'argument de la racine carrée est toujours positif. Aussi, que, lorsque  $\varepsilon = 0$ ,  $X + Y = 0$ , donc c'est la racine qui nous intéresse. En effet, si l'on trace  $u^3 + u - \varepsilon$ , comme fonction de  $u$ , on trouve le dessin suivant (cf. fig. 3) Puisque,

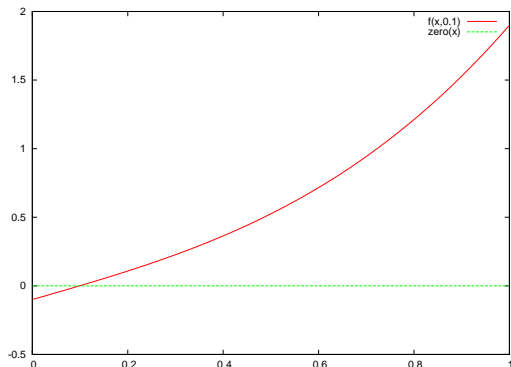


FIG. 3 -  $u^3 + u - \varepsilon$  comme fonction de  $u$ , pour  $\varepsilon = 0.1$ .

comme fonction de  $u$ ,  $u^3 + u - \varepsilon$  est une fonction monotone, elle n'a qu'une seule racine. Connaissant une racine on peut déterminer les deux autres de la façon suivante : La structure de l'équation nous renseigne que la somme des trois racines, qui est égale à l'opposée de la valeur du coefficient du terme en  $u^2$  pour une équation cubique, est égale à zéro. Ainsi la somme des deux autres racines est égale à  $-X - Y$ . Le produit des trois racines est égal à l'opposé de la valeur du coefficient constant (pour une équation d'ordre impair). Par conséquent, si l'on pose  $r_1$  et  $r_2$  les deux autres racines, on a que

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= -X - Y \\ r_1 r_2 &= \frac{\varepsilon}{X + Y} \end{aligned}$$

Ainsi  $r_1$  et  $r_2$  sont les racines de l'équation du second degré,

$$t^2 + t(X + Y) + \frac{\varepsilon}{X + Y} = 0$$

à savoir

$$r_1 = \frac{1}{2} \left( -X - Y + \sqrt{(X + Y)^2 - \frac{4\varepsilon}{X + Y}} \right)$$

$$r_2 = \frac{1}{2} \left( -X - Y - \sqrt{(X + Y)^2 - \frac{4\varepsilon}{X + Y}} \right)$$

et l'on constate que toutes les trois racines impliquent la combinaison

$$\sqrt{1 + \frac{27\varepsilon^2}{4}}$$

Par conséquent, lorsque l'on calcule la représentation en série de  $u(\varepsilon)$ , on développe cette combinaison ; or ce développement possède, effectivement, un rayon de convergence fini,

$$\varepsilon < \varepsilon_c = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.3849\dots$$

On peut contrôler que  $r_1$  et  $r_2$  sont des racines complexes conjuguées : Le discriminant est égal à

$$\frac{(X + Y)^3 - 4\varepsilon}{(X + Y)} = \frac{-3\varepsilon - (X + Y)}{X + Y}$$

puisque  $X + Y$  est racine de l'équation. Puisque l'on sait que  $X + Y > 0$  pour  $\varepsilon > 0$ , alors le discriminant est négatif et  $r_1$  et  $r_2$  sont complexes, conjuguées l'une de l'autre.

La question qui reste en suspens est, quel est le phénomène physique, qui est sensible à la divergence de la série pour cette valeur du rapport entre énergie rotationnelle et tension de la corde ou entre énergie rotationnelle et champ électrique dipolaire ?

On va mettre cette question de côté pour se concentrer, alors, sur l'interprétation des résultats pour  $\varepsilon < \varepsilon_c = 0.3849\dots$  Dans ce cas la série converge et représente la fonction,  $u(\varepsilon)$ , solution de  $u^3 + u - \varepsilon = 0$ .

Pour  $\varepsilon = 0$  le potentiel effectif à l'allure d'un entonnoir à profondeur infinie, à l'origine, cf. fig. 4 ; le terme centrifuge, qui tend à séparer les particules, rend la profondeur finie et la position du minimum est "déplacée" vers les valeurs positives. Le fond du puits "monte" et, pour  $\varepsilon^* > 2\varepsilon_c$  dépasse zéro, la barrière centrifuge. Ce qui est surprenant est que la série diverge *dans* la barrière centrifuge ! Si l'on passe de  $u(\varepsilon)$  à la position "physique" du

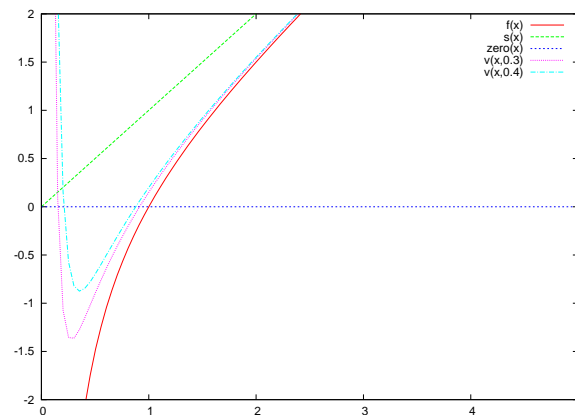


FIG. 4 - On affiche la forme adimensionnée du potentiel,  $v(u, \varepsilon) = -(1/u) + (\varepsilon/(2u^2)) + u$  comme fonction de  $u$ , pour  $\varepsilon = 0.0, 0.3, 0.4$ , ainsi que l'asymptote  $v_{\text{corde}}(u) = u$ .

minimum,  $r^*(\varepsilon) \equiv u(\varepsilon)\ell^*$ , on trouve

$$r^*(\varepsilon) \approx \varepsilon\ell^* - \varepsilon^3\ell^{*3} + \dots = -\frac{2c_2}{c_1}\varepsilon - \frac{8c_2^3}{c_1^4}\varepsilon^3 + \dots$$

On trouve, alors, que la première correction, due au moment cinétique, a comme conséquence de déplacer la distance d'équilibre entre les deux masses de zéro à une valeur proportionnelle au moment cinétique, vu que  $c_2 = L^2/(2m)$ . On retrouve la distance d'équilibre entre les deux masses, en absence de la corde/champ extérieur. La correction *suivante* est proportionnelle à la tension de la corde/intensité du champ électrique,  $c_3$ . Cette "hiérarchie" est raisonnable, car, lorsque les deux masses sont très proches, la contribution de la corde est beaucoup plus petite que la contribution du moment cinétique.

Par la suite on va essayer de mettre au point la théorie d'approximation, lorsque l'on varie la tension de la corde/intensité du champ électrique extérieur à moment cinétique fixe.

3. **OPTIONNEL** : Si l'on veut faire un développement en puissances d'une quantité proportionnelle à la tension de la corde,  $c_3$ , on se rend compte qu'il faut effectuer un changement de variables, car, pour  $c_3 = 0$ , l'équation possède une racine et, pour  $c_3 \neq 0$  elle en possède trois. On ne peut, non plus, employer  $\ell^*$  comme échelle de longueur, car elle varie avec la tension de la corde! Montrer que, si l'on pose  $r \equiv xc_3^\alpha$ , alors, on doit choisir  $\alpha = -1/2$  et arriver à l'équation

$$x^3 - c_1x - 2c_2\sqrt{c_3} = 0$$

Cette équation n'est pas encore sous forme adimensionnée. La écrire sous forme adimensionnée et adapter le programme pour calculer la position d'équilibre en une série de puissances dans un paramètre proportionnel à la tension de la corde,  $c_3$ .

*Réponse* : L'équation du départ est

$$c_3r^3 - c_1r - 2c_2 = 0$$

Une combinaison des constantes, qui possède les dimensions d'une longueur et n'implique pas le paramètre  $c_3$  est

$$\ell^* \equiv -\frac{2c_2}{c_1}$$

la valeur de la position de l'équilibre, lorsque  $c_3 = 0$ . On peut, alors, l'employer comme unité des longueurs et écrire

$$r \equiv \rho\ell^*$$

et obtenir l'équation suivante

$$-\frac{4c_2^2c_3}{c_1^3}\rho^3 + \rho - 1 = 0$$

et l'on se rend compte que la combinaison

$$\varepsilon \equiv -\frac{4c_2^2c_3}{c_1^3} > 0$$

(puisque  $c_1 < 0, c_2 > 0, c_3 >$ ) est sans dimensions et proportionnelle à  $c_3$ . On doit effectuer une transformation pour "déplacer"  $\varepsilon$  du terme en  $\rho^3$  à un autre-et de façon à l'avoir au numérateur! Si l'on pose

$$\rho \equiv u\varepsilon^\alpha$$

on trouve, pour  $\alpha = -1/2$ ,

$$u^3 + u - \sqrt{\varepsilon} = 0$$

une équation de la même forme que pour le cas précédent, seulement, ici, on note que le paramètre de développement est  $\sqrt{\varepsilon}$  et non  $\varepsilon$ -si  $\varepsilon < 0$  la corde "répousse" au lieu de retenir! Mais, à part ceci, la technique reste la même et l'on obtient la même récurrence et une série dont les coefficients des puissances impaires en  $\sqrt{\varepsilon}$  sont non-nulles. Ainsi

$$u \approx \sqrt{\varepsilon} - \varepsilon\sqrt{\varepsilon} + \dots$$

ce qui implique que

$$\rho \approx 1 - \varepsilon + \dots$$

et

$$r^* \approx \ell^* - \varepsilon\ell^* + \dots = -\frac{2c_2}{c_1} - \frac{8c_2^3}{c_1^4}c_3 + \dots$$

et l'on trouve que la corde, effectivement, conduit à ce que les deux masses soient plus proches l'une à l'autre, puisque  $r^*(\varepsilon) < \ell^*$ , en premier ordre en  $\varepsilon$ . Il est, aussi, intéressant de noter que ces premiers termes sont identiques aux termes du développement précédent! Ceci n'est pas une surprise, vu que l'équation a exactement la même structure et les seuls coefficients non-nuls sont ceux, qui multiplient les puissances  $\varepsilon^m\sqrt{\varepsilon}$ . Le facteur  $\sqrt{\varepsilon}$  est, par la suite, absorbé lors du passage de  $u(\varepsilon)$  à  $\rho(\varepsilon)$  et, puisque le coefficient  $A_1 \neq 0$ , ceci implique les expressions algébriques vont être identiques-mais leur sens est, cependant, totalement différent, car, dans le cas précédent, on fixe  $c_3$  et l'on varie  $c_2$ , tandis que maintenant on fixe  $c_2$  (le moment cinétique) et l'on varie  $c_3$  (la tension de la corde/intensité du champ électrique).