Université "François Rabelais" de Tours
L2 Sciences de la Matière
Modélisation, Simulations, Outils Informatiques
2014–2015

TD0 : Chocs de particules relativistes : La puissance des lois de conservation

On cherche à modéliser le choc de deux protons, dans le référentiel du centre de masse, lorsque leurs énergies (dans ce référentiel) peut dépasser leur énergie au référentiel de repos– c.à.d. leur masse. Alors des particules peuvent être crées, qui n'étaient pas présentes dans l'état initial. On voudrait comprendre comment les lois de conservation peuvent contraindre les propriétés des particules dans l'état final.

Les particules qui peuvent apparaître dans l'état final doivent satisfaire les lois de conservation suivantes :

- Conservation de l'énergie
- Conservation de l'impulsion
- Conservation de la charge électrique
- Conservation du nombre baryonique
- Conservation du nombre leptonique

Il faut savoir que les protons et les neutrons sont des baryons (constitués de 3 quarks) tandis que électrons, muons et leptons τ (ainsi que leurs neutrinos associés et leurs antiparticules) sont des leptons.

Le nombre leptonique, en fait, est conservé "par espèce" : le nombre leptonique "électronique" (qui compte les électrons et les neutrinos électroniques) est conservé séparément du nombre leptonique muonique ou du nombre leptonique "tau–ique".

Le Higgs étant un nouvel état de la matière, ni baryon, ni lepton, il possède nombre baryonique zéro et nombres leptoniques zéro.

Ainsi l'on va s'intéresser aux réactions suivantes :

$$p+p \rightarrow \begin{cases} p+p+e^+ + e^- \\ p+p+\mu^+ + \mu^- \\ p+p+\tau^+ + \tau^- \\ p+p+p+\overline{p} \\ p+p+n+\overline{n} \\ p+p+h+h \end{cases} \tag{1}$$

(On indique par une barre l'antiparticule. Pour des raisons historiques on indique les charges électriques pour les leptons chargés. Le Higgs est sa propre antiparticule, car c'est une particule neutre.) Ces nombres "quantiques" sont conservés de façon "algébrique" et les antiparticules ont des valeurs dont le signe est opposé au signe du nombre pour la particule.

Ces réactions conservent, *a priori* toutes les charges "internes" (électrique, nombre baryonique et nombres leptoniques)–les seules contraintes à étudier sont celles imposées par la conservationn de l'énergie de l'impulsion, que l'on va étudier, par la suite.

Dans le référentiel du centre de masse, les deux protons incidents ont énergie totale E_1, respectivement E_2 et impulsions $\boldsymbol{p}_1$, respectivement $\boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{p}_1$.

En plus, dans tout référentiel on a que

$$E_1^2 - ||\boldsymbol{p}_1||^2 = m_\mathrm{p}^2 = E_2^2 - ||\boldsymbol{p}_2||^2 \tag{2}$$

Dans le centre de masse ces relations impliquent que

$$E_1 = E_2 \Rightarrow E_\mathrm{initiale} = E_1 + E_2 = 2E_1 = 2E_2$$

On pose $(E_1', \boldsymbol{p}_1')$ et $(E_2', \boldsymbol{p}_2')$ les énergies et impulsions des protons dans l'état final et $(E_3', \boldsymbol{p}_3')$, respectivement $(E_4', \boldsymbol{p}_4')$ les énergies et impulsions des deux autres particules dans l'état final.

L'état final possible sera contraint par les conditions

$$E_\mathrm{initiale} = E_\mathrm{finale} = E_1' + E_2' + E_3\text{"} + E_4'$$
$$\boldsymbol{p}_\mathrm{initiale} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{p}_\mathrm{finale} = \boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' + \boldsymbol{p}_3' + \boldsymbol{p}_4'$$

On a toujours les relations

$$E_1'^2 - ||\boldsymbol{p}_1'||^2 = m_\mathrm{p}^2 = E_2'^2 - ||\boldsymbol{p}_2'||^2$$

ainsi que

$$E_3'^2 - ||\boldsymbol{p}_3'||^2 = m_2^2 = E_4'^2 - ||\boldsymbol{p}_4'||^2$$

Une particule possède la *même* masse que son antiparticule. On note par m_2 la masse de chacune des particules supplémentaires créées.

Les relations (2), ainsi que les correspondantes pour l'état final, peuvent être écrites de la manière suivante (on laisse tomber les indices, car les relations sont valables pour toute particule massive) :

$$E^2 - ||\boldsymbol{p}||^2 = m^2 \Leftrightarrow \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(\frac{||\boldsymbol{p}||}{m}\right)^2 = 1$$

On peut "résoudre" cette relation, qui contraint les deux variables, E et $||\boldsymbol{p}||$, en écrivant

$$E = m\cosh\alpha \quad \text{et} \quad ||\boldsymbol{p}|| = m\sinh\alpha$$

On peut montrer que la variable α, appelée "rapidité", est reliée à la vitesse, $v \equiv \beta c$, relative du référentiel de centre de masse par rapport au référentiel du repos de la particule par la relation $v/c = \beta = \tanh\alpha$.

On considère, maintenant, l'état final particulier $\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{p}_3' + \boldsymbol{p}_4' = \boldsymbol{0}$ et l'on choisit le système des coordonnées spatiales de façon à ce que $\boldsymbol{p}_1 = p_1\boldsymbol{e}_x$; alors $\boldsymbol{p}_2 \equiv p_2\boldsymbol{e}_x = -p_1\boldsymbol{e}_x$.

1. Montrer que dans le cas étudié les impulsions des deux protons dans l'état final, avec les impulsions des deux protons dans l'état initial, c.à.d. l'ensemble des 4 vecteurs, appartiennent au même plan, que l'on peut identifier avec le plan $x - y$.

   Les impulsions des deux autres particules sont-elles *contraintes* d'appartenir à ce plan, où est-ce un cas spécial ?

2. Montrer que la loi de conservation de l'énergie prend la forme suivante

$$\cosh\alpha_1 = \cosh\alpha_1' + \frac{m_2}{m_\mathrm{p}}\cosh\alpha_3' \Leftrightarrow 1 = \frac{\cosh\alpha_1}{\cosh\alpha_1'} + \frac{m_2}{m_\mathrm{p}}\frac{\cosh\alpha_3'}{\cosh\alpha_1} \equiv u + v \tag{3}$$

3. Si l'on fixe l'énergie, E_1, donc la rapidité,α_1, du proton dans l'état initial, tracer, dans le plan (u, v) la deuxième relation, pour les réactions (1). Discuter, en particulier, les coordonnées des bouts de ces courbes.

4. Si l'on ne fixe pas l'énergie, E_1, donc la rapidité, α_1, du proton dans l'état initial, mais l'on la laisse varier, tracer dans l'espace la surface définie par la première des relations (3) et discuter son allure. Employer comme coordonnées dans cet espace les variables u, v et $\cosh\alpha_1$. On se rend compte immédiatement que $|\alpha_1'| < |\alpha_1|$; mais les contraintes sur α_3' sont plus facilement aperçues par une étude graphique, où l'on emploie un programme pour tenir compte des contraintes. Discuter la structure du programme employé.

   On s'intéresse plus particulièrement au cas du LHC, pour lequel $E_1 = 6500$ GeV$\approx 6500 m_\mathrm{p}$, donc $\cosh\alpha_1 = 6500$.

   Discuter les contraintes pour produire les particules mentionnées.