

Correction du devoir d'analyse

Ex 1 1. Soit $(z_n) \subset A+B$ une suite convergente vers $z \in \mathbb{R}^n$. Par définition de $A+B$, il existe

$(x_n) \subset A$ et $(y_n) \subset B$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = x_n + y_n \quad (*)$$

Comme A est fermé et borné, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) qui converge vers $x \in A$. $(*)$ implique que

$$y_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z - x$$

donc $(y_{\varphi(n)})$ cv vers $y = z - x$ et $y \in B$ car

B est fermé. Conclusion: $z = x + y$ avec

$x \in A$ et $y \in B$ donc $z \in A+B$ et $A+B$ est un fermé.

2. Contre exemple si A n'est pas borné.

$$A = \{n, n \in \mathbb{N}^*\}, \quad B = \{-n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$$

A et B fermés.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} = n + (-n + \frac{1}{n}) \in A+B$$

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ et } 0 \notin A+B$$

donc $A+B$ n'est pas fermé.

Ex 2 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto Ax$$

et l'écriture donc continue

car $\mathbb{R}^n$ espace vectoriel de dimension finie

On raisonne par contradiction en supposant

que $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = +\infty$. Alors il existe

une suite $(x_n) \subset C(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$

telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| = +\infty$.

Comme $C(0,1)$ est borné et fermé, il existe

une sous-suite extraite $(x_{p(n)})$ qui

converge vers $x \in C(0,1)$.

② Comme $x \mapsto Ax$ est continue on a

$$Ax_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Ax \text{ ds } \mathbb{R}^n$$

ce qui contredit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| = +\infty$.

Encl: $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty$, c'est à dire
il existe $M > 0$ telle que

$$\forall x \in C(0,1), \|Ax\| \leq M.$$

② $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, on peut écrire

$$x = \|x\| \frac{x}{\|x\|} \Rightarrow Ax = \|x\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

$$\Rightarrow \|Ax\| = \|x\| \|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\|$$

Or $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$ donc d'après le ①

$$\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \leq M$$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq M < \infty$$

$$\textcircled{3} \quad N: \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

i) Separation: $\forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

$$N(A) \leq 0 \Rightarrow \forall x \neq 0, Ax \leq 0 \\ \Rightarrow A = 0$$

ii) Homogeneity: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

$$N(\lambda A) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|}{\|x\|} \\ = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq |\lambda| N(A)$$

(iv) Inégalité triangulaire

$\forall A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$$

$$\Rightarrow N(A+B) \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|}$$

$$\leq \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \right)$$

$$\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = N(A) + N(B)$$

Donc N est une norme.

(3)

Ex 3 Montrons que l'adhérence de
 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sin(\frac{1}{x}), x \in]0, 1]\}$
et $\bar{A} = A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$

(i) Montrons $A \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \subset \bar{A}$

Il suffit de vérifier que $\{0\} \times [-1, 1] \subset \bar{A}$

$\forall \theta \in [-1, 1],$

$$(0, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\theta + 2n\pi}, \sin(\theta + 2n\pi) \right)}_{\in A \text{ pour } n \geq 1}$$

$$\Rightarrow (0, \theta) \in \bar{A}$$

d'où $\{0\} \times [-1, 1] \subset \bar{A}$.

(ii) Montrons $\bar{A} \subset A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$

Soit $(x_n, \sin(\frac{1}{x_n})) \in A$ tel que

$$(x_n, \sin(\frac{1}{x_n})) \rightarrow (x, y) \text{ de } \mathbb{R}^2$$

On a $x_n \rightarrow x$ donc $x \in [0, 1]$

Comme $\sin \theta \rightarrow \sin(\frac{1}{x})$ et continue sur $]0,1]$, si $x \in]0,1]$ alors

$$y = \sin(\frac{1}{x}) \text{ et } (x,y) \in A.$$

Si $x = 0$ alors comme $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin \theta \in [-1,1]$, on a forcément $y \in [-1,1]$ donc $(x,y) \in \{0\} \times [-1,1]$

$$\Rightarrow \bar{A} \subset A \cup (\{0\} \times [-1,1])$$

Donc: $\bar{A} = \underline{A \cup (\{0\} \cup [-1,1])}$