

Correction Partiel

Exercice 1 : Toutes les fct étudiées sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Il suffit donc de vérifier la convergence des intégrales en $0+$ et $+\infty$.

$$1) \quad \left| \frac{\ln x}{x^2 - x + 1} \right| \leq \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2 - x + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Comme } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx \text{ cv} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - x + 1} dx \text{ cv}$$

$$\left| \frac{\ln x}{x^2 - x + 1} \right| \underset{0+}{\sim} |\ln x| = -\ln x$$

$$\text{Comme } \int_0^1 \ln x dx \text{ cv} \Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - x + 1} dx \text{ cv}$$

Concl : $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - x + 1} dx$ converge

$$(ii) \quad \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2 + |\sin x|}} \underset{0+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ cv} \Rightarrow \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2 + \sin x}} dx \text{ cv}$$

Pour $x \geq 1$,

$$\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2 + |\sin x|}} \leq e^{-\sqrt{x}} \leq c x^{-2} \quad \text{avec } c > 0.$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2 + |\sin x|}} dx$ converge.

(ii) $\left| \frac{\sin x}{x^{3/2}} \right| \underset{0+}{\sim} \frac{1}{x^{1/2}} \Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx \text{ cv}$

$$\left| \frac{\sin x}{x^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{x^{3/2}} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx \text{ cv}$$

(car absolument convergente)

Exercice 2 :

1. La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente si la suite des sommes partielles ($S_n = \sum_{k=0}^n u_k$) est convergente.

$$2. i) \left| \frac{n}{3^n \ln n} \right| \leq \frac{n}{3^n} \quad \text{pour } n \geq 3$$

$$\begin{aligned} \text{On pose } a_n &= \frac{n}{3^n} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \frac{3^n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{n+1}{3n} \xrightarrow{+\infty} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

∞ après la règle de d'Alembert $\sum a_n$ cv
donc $\sum \frac{n}{3^n \ln n}$ cv.

$$\begin{aligned} ii) \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1 &= \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) - 1 \\ &= \exp\left(-\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - 1 \\ &= +1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Comme $|O(\frac{1}{n^2})| \leq \frac{c}{n^2}$ et que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ cv
on en déduit que $\sum_{n \geq 1} \left(\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1 \right)$ cv

$$iv) \quad \frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0, \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{et } \frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

$$\text{Comme } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ div} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \text{ div.}$$

$$v) \quad \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n^2} \text{ cv}$$

(con absolument cv).

Exercice 3 :

1. Comme $\frac{1}{n+1} \downarrow 0$, $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ est une série alternée et donc converge.

$$\begin{aligned} 2. \quad \forall y \neq 1, \quad (1-y) \sum_{k=0}^{n-1} y^k &= \sum_{k=0}^{n-1} y^k - \sum_{k=0}^{n-1} y^{k+1} \\ &= 1 - y^n \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall y \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} y^k = \frac{1-y^n}{1-y}$$

On pose $y = -x$. $y \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Donc $\forall x \in [0, 1]$

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

3. On étend (*) sur $[0, 1]$. On obtient

$$(**) \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

4. $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$$

En intégrant sur $[0, 1]$ on obtient

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

On passe à la limite dans (**) quand $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

et

$$0 \leq \left| (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

Donc, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2.$

Par tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{(-1)^{q+1}}{q+1}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = - \sum_{q=0}^{n-1} \frac{(-1)^q}{q+1}$$

En passant à la limite qd $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = -\ln 2.$$

Exercice 4 :

1. Comme $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sin x$ sont impaires, il suffit de montrer le résultat pour $y \in \mathbb{R}_+$. On remarque que

$$i) \quad \sin(0) = 0$$

$$ii) \quad \forall y \geq 0, \quad \sin'(y) = \cos y \leq 1.$$

$$\text{Donc } \forall y \geq 0, \quad \sin y \leq y.$$

Comme $\sin y \geq 0$ sur $[0, 1]$ on en déduit

$$\forall y \in [0, 1], \quad |\sin y| \leq |y|$$

Pour $y > 1$, l'inégalité est triviale car

$$|\sin y| \leq 1. \quad \text{CQFD.}$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(x) \rightarrow 0.$$

Par tout $x \neq 0$ fixe,

$$b_n(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc (b_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$.

$$3. \forall x \in [-a, a],$$

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \right| \leq \left| x^2 \frac{1}{nx} \right| \leq \frac{a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [-a, a]} |b_n(x)| \leq \frac{a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc (b_n) converge uniformément vers 0 sur $[-a, a]$.

$$4. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{Donc } \sup_{x \in \mathbb{R}} |b_n(x)| = +\infty.$$

Par conséquent (b_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.